Transformée de Laplace

Avant propos

Les signaux et systèmes étudiés en automatique sont toujours supposés causals, c'est-à-dire nuls avant l'instant $t = 0$ exclu. On parle de fonction causale $f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\begin{cases} f(t) = 0, & \forall t < 0, \\ f(t) \in \mathbb{R}, & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Définition

La *transformée de Laplace* est l'opérateur linéaire qui associe à la fonction scalaire causale $f(t)$ de la variable réelle t, la fonction $F(p)$ de la variable complexe $p = \sigma + j\,\omega$ (dite *variable de Laplace*) définie par :

$$F(p) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad = \quad \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{2}$$

Notation

$$F(p) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} \tag{3}$$

Remarques

- $F(p)$ n'existe que si $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}|dt = \int_0^{+\infty} |f(t)|\, e^{-\sigma t}\, dt$ existe.
- Lien avec la transformée de Fourrier en posant $p = j\omega$. Dans ce cas, on retrouve :

$$\mathscr{F}\left\{f(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =: F(j\omega)$$

Formule d'inversion

$$f(t) = \lim_{A \to +\infty} \quad \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - jA}^{\sigma_0 + jA} F(p)e^{pt}\, dp, \tag{4}$$

$F(p)$ est holomorphe pour $\mathcal{R}e\left\{p\right\} > \sigma_0$.

En pratique, au lieu d'utiliser la formule d'inversion ci-dessus, on préférera utiliser une décomposition en éléments simples de $F(p)$ accouplée à la lecture d'un tableau des transformées de Laplace usuelles, pour retrouver le signal *original* $f(t)$.

Propriétés de la Transformée de Laplace

Soient $X(p)$ et $Y(p)$ les transformées de Laplace des fonctions causales $x(t)$ et $y(t)$ respectivement.

– LINÉARITÉ : $\mathscr{L}\left\{A\,x(t) + B\,y(t)\right\} = A\,X(p) + B\,Y(p)$
– RETARD : $\mathscr{L}\left\{x(t-\tau)\right\} = X(p)\,e^{-\tau p}$
– TRANSLATION SUR p : $\mathscr{L}\left\{e^{-at}\,x(t)\right\} = X(p+a)$
– DÉRIVATION PAR RAPPORT À t :

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d\,x(t)}{dt}\right\} = p\,X(p) - x(0^+)$$
$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n\,x(t)}{dt^n}\right\} = p^n\,X(p) - p^{n-1}\,x(0^+) - p^{n-2}\,x^{(1)}(0^+) - \ldots - p\,x^{(n-2)}(0^+) - x^{(n-1)}(0^+)$$

où $x^{(k)}(0^+) = \left.\dfrac{d^k\,x(t)}{dt^k}\right|_{t\to 0,\,t>0}$.

– CHANGEMENT D'ÉCHELLE SUR t : $\mathscr{L}\left\{x(at)\right\} = \dfrac{1}{|a|}\,X(p)$
– INTÉGRATION PAR RAPPORT À t : $\mathscr{L}\left\{\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right\} = \dfrac{X(p)}{p}$
– DÉRIVATION PAR RAPPORT À p : $\mathscr{L}\left\{(-t)^n\,x(t)\right\} = \dfrac{d^n\,X(p)}{dp^n}$
– CONVOLUTION :

$$x(t) \star y(t) = \int_0^t x(\tau)\,y(t-\tau)\,d\tau$$
$$\mathscr{L}\left\{x(t) \star y(t)\right\} = X(p)\,Y(p)$$

Théorème de la valeur* finale *:

Si $x(t)$ tend vers une valeur finie lorsque t tend vers l'*infini* (c'est-à-dire si $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_\infty < \infty$, $\chi_\infty \in \mathbb{R}$), alors

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{p\to 0} p\,X(p)$$

Théorème de la valeur* initiale *:

Si $x(t)$ tend vers une valeur finie lorsque t tend vers *zéro* par valeurs supérieures (c'est-à-dire si $x(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \chi_0 < \infty$, $\chi_0 \in \mathbb{R}$) alors

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{p\to+\infty} p\,X(p)$$

Tableau des transformées de Laplace usuelles :

Transformée de Laplace $F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	Fonction du temps $f(t),\ t \geq 0$	Transformée de Laplace $F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	Fonction du temps $f(t),\ t \geq 0$
1	$\delta(t)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos(bt)$
e^{-nTp}	$\delta(t-nT)$	$\dfrac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\sin(bt)$
$\dfrac{1}{p}$	$1_0^+(t) = \begin{cases} 0, \forall t<0 \\ 1, \forall t\geq 0 \end{cases}$	$\dfrac{\omega^2}{p^2(p^2+\omega^2)}$	$t - \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega t)$
$\dfrac{1}{p^2}$	t	$\dfrac{\omega^2}{p(p^2+\omega^2)}$	$1-\cos(\omega t)$
$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	$\dfrac{1}{n!}t^n$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\dfrac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\dfrac{1}{(p+a)^2}$	$t\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\dfrac{1}{(p+a)^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$F(p+a)$	$f(t)\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{a}{p^2(p+a)}$	$t - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-at}}{a}$
$\dfrac{a}{p(p+a)}$	$1-\mathrm{e}^{-at}$	$\dfrac{a}{p^3(p+a)}$	$\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t}{a} + \dfrac{(1-\mathrm{e}^{-at})}{a^2}$