Systèmes du second ordre

L.T.I. à temps continu

On considère un *système monovariable, linéaire, stationnaire et causal*, d'entrée (scalaire) $u(t)$ et de sortie mesurée (scalaire) $y(t)$, dont la relation entrée-sortie est décrite par l'équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\xi\omega_0 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = K\omega_0^2\, u(t) \tag{1}$$

et les conditions initiales

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = y_0' \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Sa fonction de transfert est notée $G(p)$ de sorte que $Y(p) = G(p)\,U(p)$, $Y(p)$ désignant la transformée de Laplace du signal temporel de sortie $y(t)$ et $U(p)$ celle du signal temporel d'entrée $u(t)$. La réponse impulsionnelle du système, notée $g(t)$, a pour transformée de Laplace $G(p)$.

Fonction de transfert

A conditions initiales nulles, $y_0 = 0$ et $y_0' = 0$, celle-ci s'écrit :

$$G(p) = \frac{K}{\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right)p^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\right)p + 1} \tag{3}$$

$$= \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}. \tag{4}$$

K : Gain statique,

ξ : Coefficient d'amortissement (sans unité),

ω_0 : Pulsation propre ou pulsation naturelle (en rad/s) avec $\omega_0 > 0$ par convention.

Stabilité *Entrée Bornée Sortie Bornée* du système

Le système est stable lorsque les pôles sont à partie réelle strictement négative, ce que l'on vérifie aisément, *p. ex.* à l'aide du critère algébrique de Routh-Hurwitz. Ce cas correspond à $\xi > 0$.

Pôles du système, cas stable ($\xi > 0$)

Le système possède deux pôles, trois cas différents peuvent se présenter :

$\xi > 1,$ le système possède 2 pôles réels : $G(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$, $\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \\ p_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases}$

$\xi = 1,$ le système possède 1 pôle double et réel : $G(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{(p-p_0)^2}$, $p_0 = -\omega_0$

$\xi < 1,$ le système possède 2 pôles complexes conjugués : $G(p) = \dfrac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$,

$$\begin{cases} p_{c_1} = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \\ p_{c_2} = -\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \\ \quad\;\; = \overline{p_{c_1}} \end{cases}$$

On note $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ que l'on appelle la *pseudo-pulsation*, $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$ représente la *pseudo-période*.

Réponse impulsionnelle

L'entrée est un Dirac : $u(t) = \delta(t)$, $U(p) = 1$. La sortie $y(t)$ correspond alors à $g(t)$: $y(t) = g(t)$. Le type de réponse impulsionnelle dépend de la valeur de ξ :

$\xi > 1$: on parle de *système hyper-amorti*. On a :

$$y(t) = \frac{K\omega_0^2}{\tilde{\Omega}} e^{-\xi\omega_0 t} \sinh\left(\tilde{\Omega} t\right) \quad \text{où} \quad \tilde{\Omega} = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}. \tag{5}$$

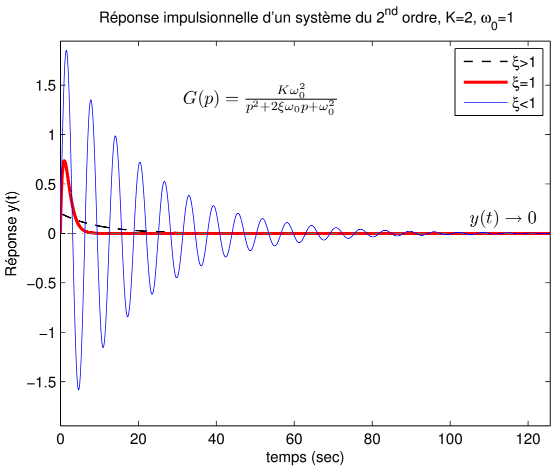
$\xi = 1$: on parle de *système à amortissement critique*. On a :

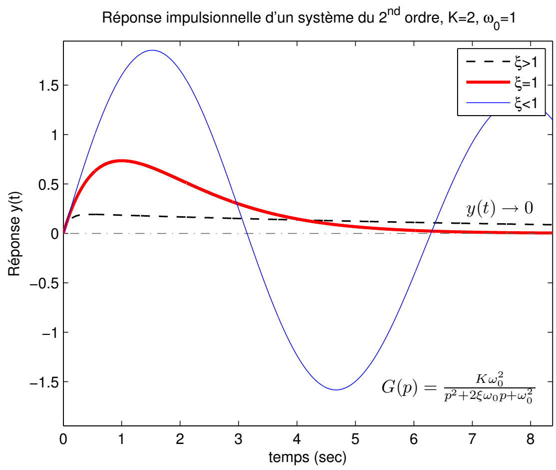
$$y(t) = K\omega_0^2 \, t \, e^{-\omega_0 t}. \tag{6}$$

$\xi < 1$: on parle de *système sous-amorti*. On a :

$$y(t) = \frac{K\omega_0^2}{\Omega} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\Omega\, t\right) \quad \text{où} \quad \Omega = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}. \tag{7}$$

Les différents cas sont illustrés ci-dessous, dans le cas de conditions initiales nulles :





On remarque que toutes les réponses impulsionnelles partent de zéro et tendent asymptotiquement vers zéro.

Réponse indicielle

L'entrée est un échelon unité : $u(t) = \mathbf{1}_0^+(t)$, $U(p) = \dfrac{1}{p}$.

Le type de réponse indicielle dépend de la valeur de ξ :

$\xi > 1$: on parle de réponse *apériodique*. On a :

$$y(t) = K\left(1 - \frac{\omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left(\frac{1}{p_2}e^{p_2 t} - \frac{1}{p_1}e^{p_1 t}\right)\right) \tag{8}$$

$\xi = 1$: on parle de réponse *apériodique critique*.

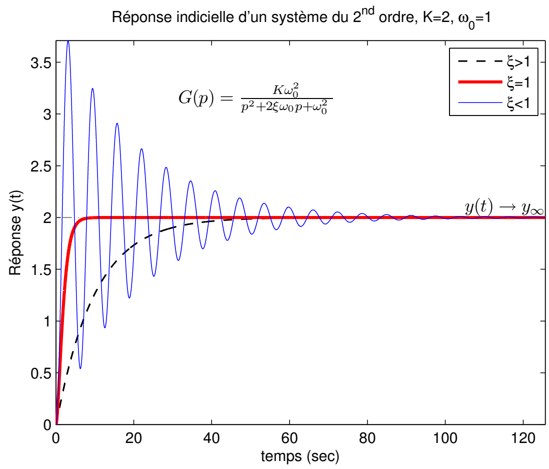
$$y(t) = K\left(1 - e^{-\omega_0\, t} + t e^{-\omega_0\, t}\right) \tag{9}$$

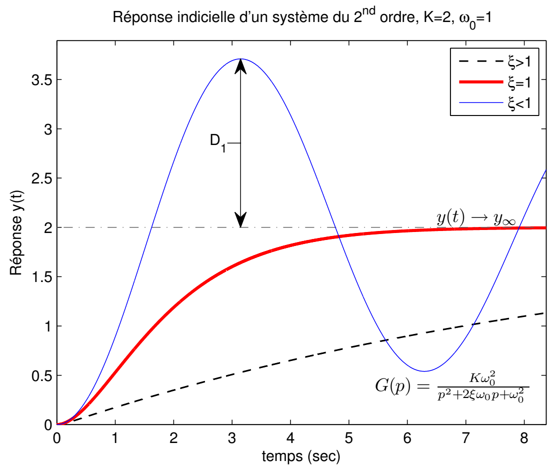
$\xi < 1$: on parle de réponse *oscillante-amortie*. On a :

$$y(t) = K\left(1 - \frac{\omega_0}{\Omega} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\Omega t + \varphi\right)\right) \tag{10}$$

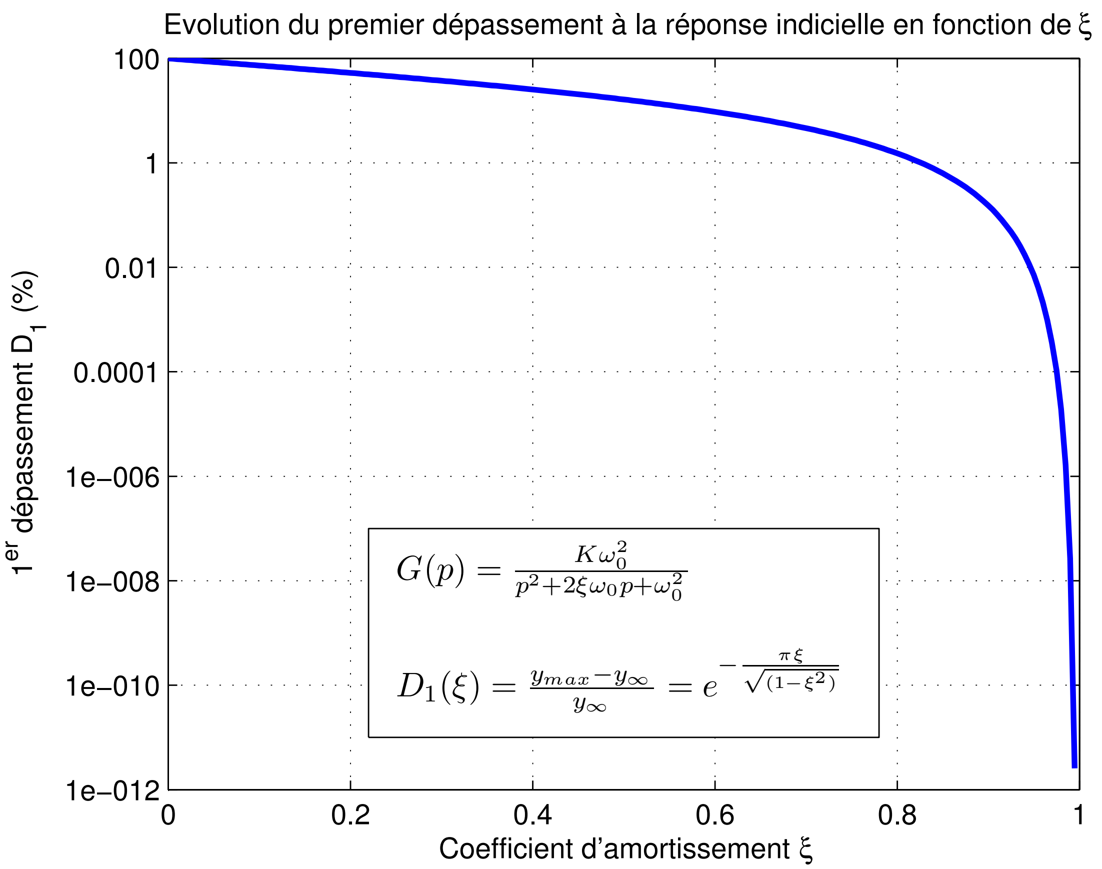
$$\begin{aligned} \text{où} \quad \varphi &= \arctan\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right) \\ &= \arccos\left(\xi\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Toutes les réponses indicielles partent de zéro et présentent une pente nulle à l'origine $(t = 0)$ ainsi que le montrent les figures suivantes.

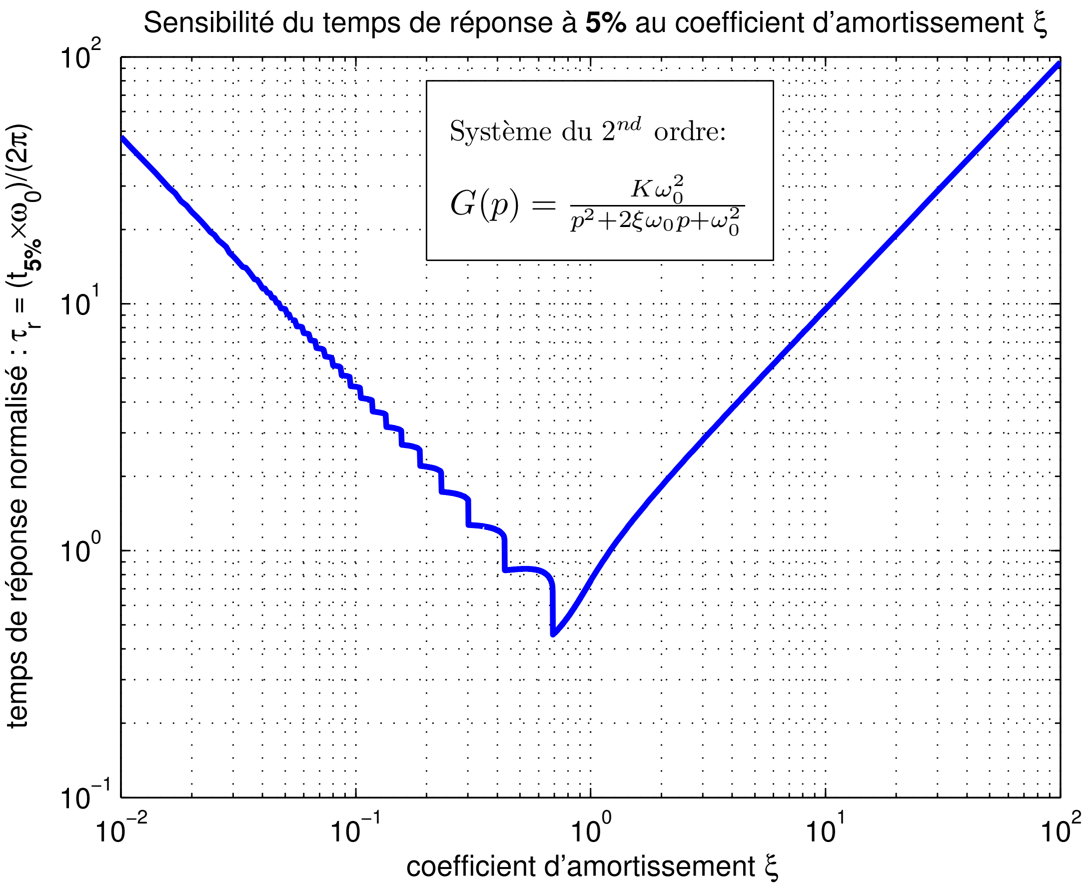


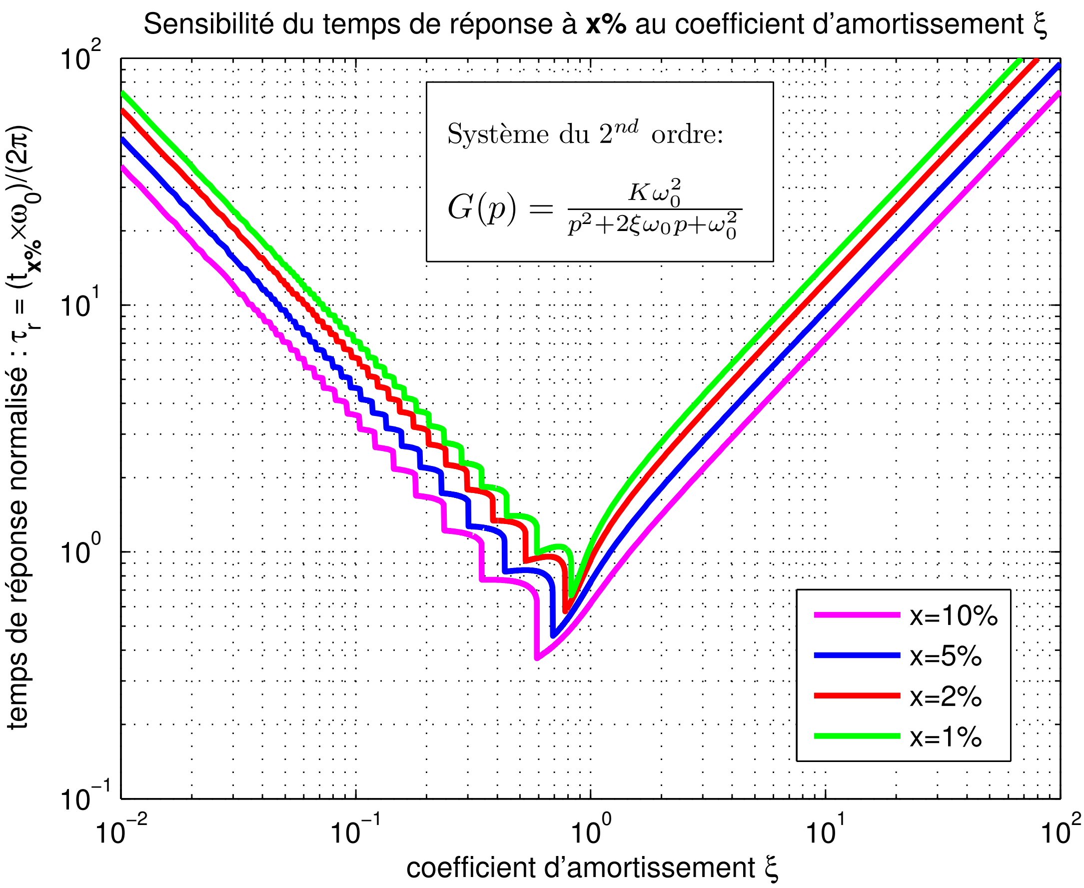


Dans le cas $\xi < 1$, le ***premier dépassement*** de la réponse temporelle est noté D_1. Par définition, $\boxed{\mathbf{D_1 = \frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}}}$. On montre que $y_{\max} = y(t = \frac{T}{2})$ où $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ et on montre également que $\boxed{\mathbf{D_1 = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}}}$, soit $\boxed{\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(\ln D_1)^2}}}}$. Son évolution en fonction de ξ est représentée ci-après sur une échelle semi-logarithmique.



L'**évolution du temps de réponse** à 5% en fonction de ξ trouve son minimum pour $\xi \approx 0,691$. De même, le temps de réponse à 10% trouve son minimum pour $\xi \approx 0,591$, le temps de réponse à 2% trouve son minimum pour $\xi \approx 0,78$ et le temps de réponse à 1% trouve son minimum pour $\xi \approx 0,826$.


Sensibilité du temps de réponse à **5%** au coefficient d'amortissement ξ
Système du 2^{nd} ordre:
$G(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$
temps de réponse normalisé : $\tau_r = (t_{5\%}\times\omega_0)/(2\pi)$
coefficient d'amortissement ξ
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{-2}


Sensibilité du temps de réponse à **x%** au coefficient d'amortissement ξ
Système du 2^{nd} ordre:
$G(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2}$
temps de réponse normalisé : $\tau_r = (t_{x\%}\times\omega_0)/(2\pi)$
coefficient d'amortissement ξ
x=10%
x=5%
x=2%
x=1%
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{-2}

Réponse fréquentielle

Elle est obtenue en prenant $p = j\omega$ et en calculant le gain et la phase dans chaque cas. Lorsque $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, la courbe de gain présente un maximum, un pic de gain, pour une pulsation $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \mathbf{2}\xi^2}}$ appelée *pulsation de résonance*. Le gain maximum vaut alors $\boxed{G_r = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}}$ et il est appelé *pic de résonance*. Lorsque $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1}$, **le système ne présente plus de pics de résonance**. Toutefois, il conserve son caractère *oscillant-amorti*. Les figures ci-dessous illustrent les réponses en gain et en phase dans chacun des cas $\xi > 1$, $\xi = 1$ et $\xi < 1$.