

## Asservissement des systèmes *L.T.I.* à temps continu

On considère un système *L.T.I.*<sup>1</sup> et *S.I.S.O.*<sup>2</sup> noté  $(\Sigma)$ , d'entrée  $u(t)$  et de sortie  $y(t)$ , dont la relation entrée-sortie, dans le domaine temporelle, est décrite par le produit de convolution :

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (1)$$

où  $h(t)$  désigne la réponse impulsionnelle de ce système.

Soit  $H(p) = \mathcal{L}\{h(t)\}$  la fonction de transfert du système, où  $H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$  est une fraction rationnelle propre, quotient du polynôme  $B(p)$  sur le polynôme monique  $A(p)$ , ces polynômes ayant pour degré  $m = \deg\{B(p)\}$  et  $n = \deg\{A(p)\}$ . On pose

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}, \quad (2)$$

avec

$$Y(p) = H(p)U(p) \quad (3)$$

où  $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  $U(p) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) et  $b_j \in \mathbb{R}$  ( $k = 0, \dots, m$ ).

## 1 Stabilité Entrée-Bornée-Sortie-Bornée

### 1.1 Principaux résultats

**Définition 1.1** Le système  $(\Sigma)$  est stable au sens Entrée-Bornée-Sortie-Bornée (ou stable au sens EBSB) si pour toute entrée  $u(t)$  bornée correspond une réponse  $y(t)$  en sortie également bornée.

En général, la bornitude d'un signal est définie au sens d'une norme.

**Définition 1.2** Un signal scalaire  $f(t)$  est borné si

$$\exists M_f \in \mathbb{R}_+^* / \|f(t)\|_\infty = \sup_{t \geq 0} |f(t)| < M_f.$$

**Définition 1.3** Le signal scalaire et causal  $f(t)$  est dit *absolument intégrable* si  $\exists M_f \in \mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\int_0^\infty |f(t)| dt < M_f.$$

**Théorème 1** Le système  $(\Sigma)$  de réponse impulsionnelle  $h(t)$  est stable au sens EBSB si, et seulement si  $h(t)$  est absolument intégrable.

**Théorème 2** Le système  $(\Sigma)$  de fonction de transfert  $H(p)$  est stable au sens EBSB si, et seulement si les pôles de  $H(p)$  (c'est-à-dire les racines de  $A(p)$ ) sont à partie réelle strictement négative.

**Remarque 1.1** La notion de stabilité EBSB est connue, en anglais, sous le nom de *BIBO-stability* pour *Bounded-Input-Bounded-Output-stability*.

---

1. pour *Linear Time Invariant* désignant les systèmes linéaires stationnaires et causaux.  
2. pour *Single Input Single Output*, désignant ainsi les systèmes à une commande et une sortie mesurée

**Preuve du Théorème 1**

**Condition suffisante :**

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$|y(t)| = \left| \int_0^\infty h(\tau)u(t-\tau)d\tau \right|,$$

$$\leq \int_0^\infty |h(\tau)u(t-\tau)|d\tau = \int_0^\infty |h(\tau)||u(t-\tau)|d\tau.$$

Ainsi, puisque  $u(t)$  est borné et que  $h(t)$  est absolument intégrable

$$|y(t)| \leq \int_0^\infty |h(\tau)||u(t-\tau)|d\tau,$$

$$\leq M_u \int_0^\infty |h(\tau)|d\tau,$$

$$\leq M_u M_h$$

ce qui signifie que  $y(t)$  est borné.

**Condition nécessaire :** Considérons la contraposée de cette proposition. Si  $h(t)$  n'est pas absolument intégrable, alors il existe  $T \in \mathbb{R}_+^*$  tel que l'intégrale

$$\int_0^T |h(t)|dt$$

ne converge pas. Considérons le signal borné suivant

$$u(T-t) = \begin{cases} +1, & h(t) \geq 0 \\ -1, & h(t) < 0 \end{cases}$$

cela conduit à

$$y(T) = \int_0^T h(\tau)u(T-\tau)d\tau = \int_0^T |h(t)|dt$$

dont le résultat ne converge pas, ce qui implique que  $y(T)$  n'est pas borné. Par conséquent, la contraposée de ce résultat est vraie, à savoir si  $h(t)$  est absolument intégrable alors le système  $(\Sigma)$  est stable au sens EBSB, c'est-à-dire que la réponse en sortie  $y(t)$  est convergente, donc est bornée, pour une entrée  $u(t)$  bornée.

**Preuve du Théorème 2**

La réponse impulsionnelle  $h(t)$  peut être déduite de la décomposition en élément simple de  $H(p)$  et de l'application à cette décomposition de la transformée de Laplace inverse, en utilisant *p. ex.* un tableau des transformées de Laplace usuelles. Cette décomposition (*p. ex.* dans  $\mathbb{C}$ ) aboutit à :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\alpha_i}{(p-\lambda_i)^k} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^q \left( \sum_{k=1}^{m_i} \gamma_k t^{k-1} \right) e^{\lambda_i t} = \sum_{i=1}^q P_i(t) e^{\lambda_i t}$$

où  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  est le résidu de la décomposition en éléments simples,  $\lambda_i$  désigne le  $i^{\text{ème}}$  pôle de  $(\Sigma)$ , de multiplicité algébrique  $m_i$ ,  $\gamma_k \in \mathbb{C}$  un scalaire dépendant de  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  et de l'application de la transformée de Laplace inverse, et  $P_i(t)$  un polynôme en  $t$  de degré  $m_i - 1$ . Ainsi,  $h(t)$  est absolument intégrable si, et seulement si les termes  $t^{k-1}e^{\lambda_i t}$  pour  $k = 1, \dots, m_i$  sont absolument intégrable. C'est-à-dire si, et seulement si  $\Re\{\lambda_i\} < 0$ .

## 1.2 Méthode algébrique de test de la stabilité EBSB

Le calcul explicite des pôles du système est à envisager lorsque cela est possible. C'est le cas pour des systèmes d'ordre inférieur ou égal à 4.

Le calcul numérique des pôles est pratique pour une analyse de la stabilité d'un système LTI. Des logiciels comme **Matlab** (payant) ou **Scilab** (gratuit) implémentent par défaut des codes permettant de calculer les racines d'un polynôme. Toutefois, il convient d'être prudent avec les logiciels de calcul numérique qui peuvent entacher les résultats d'erreurs d'arrondi pouvant s'avérer parfois critiques vis-à-vis de la stabilité.

Le critère de Routh-Hurwitz, faisant l'objet d'un autre fascicule, permet de dénombrer les pôles instables du système  $H(p)$  sans calcul explicite des pôles, mais à l'aide de l'étude du tableau de Routh construit à partir des coefficients du polynôme caractéristique (c'est-à-dire  $A(p)$  si l'analyse de la stabilité porte sur le système  $(\Sigma)$ ).

## 2 Notion d'asservissement

### 2.1 Commande en boucle ouverte

Un système peut être piloté<sup>3</sup> en agissant sur ses commandes<sup>4</sup>. La connaissance d'un modèle mathématique *entrée-sortie*<sup>5</sup> de bonne qualité permet *a priori* de prédire l'évolution des sorties d'un tel système sans en exploiter l'information par le biais des mesures de capteurs.

Un tel comportement est qualifié de commande en **boucle ouverte**.

Toutefois, le même système soumis à des perturbations<sup>6</sup> et piloté par les mêmes lois de commande boucle ouverte verra ses sorties être complètement différentes, pouvant parfois illustrer des comportements inattendus du système, *p. ex.* des erreurs plus ou moins importantes par rapport à la consigne souhaitée, voire des divergences caractérisant une dégradation parfois irréversibles du système.

C'est l'inconvénient majeur des commandes en boucle ouverte pour des systèmes soumis à des perturbations.

Exemple : Le moteur à courant continu décrit par la fonction de transfert  $G(p) = \frac{\Omega(p)}{V_u(p)} = \frac{K_v}{1 + \tau p}$  où la vitesse de rotation est perturbée par l'effet d'un couple résistant, c'est-à-dire où  $\Omega(p) = \omega(p) - \tilde{\omega}(p)$ .

### 2.2 Principe de rétroaction (ou dit de *contre-réaction*)

Intuitivement, prendre en compte l'écart d'une (ou de plusieurs) sortie avec la (ou les) référence, dans l'élaboration d'une loi de commande apparaît comme un bon moyen de se prémunir contre les inconvénients de la commande en boucle ouverte. L'idée consiste à **asservir** cette sortie à l'évolution de la référence en comparant les deux signaux (sortie mesurée par un capteur avec signal de référence généré par l'utilisateur) avant d'utiliser cet écart pour élaborer le signal de commande.

C'est le principe dit de **rétroaction** dont le but est d'observer les effets que la commande produit sur le système et de **corriger** cette commande en fonctions des résultats observés.

**Définition 2.1** - dans le cas des systèmes *L.T.I. S.I.S.O.*

- Un **correcteur** est un système LTI *entrée-sortie* monovariable utilisant à son entrée la mesure du signal de sortie du système et générant à sa sortie un signal de commande *approprié* (généré par un correcteur conférant certaines propriétés au système bouclé).
- Un **système de commande** associe l'utilisation d'un correcteur avec un dispositif permettant de comparer l'évolution d'une sortie avec une référence.
- Un **asservissement** est l'association d'un dispositif de commande convenablement connecté avec le système à commander dans une stratégie de rétroaction de sa sortie avec son entrée. On parle de **bouclage** du système ou de **commande en boucle fermée**.

Ces définitions se résument par le schéma-blocs Figure 1.

3. ou gouverné

4. *i. e.* les entrées maîtrisables par l'utilisateur du système

5. du type fonction de transfert ou représentation d'état

6. *i. e.* des entrées exogènes au système et par définition non maîtrisable par l'utilisateur

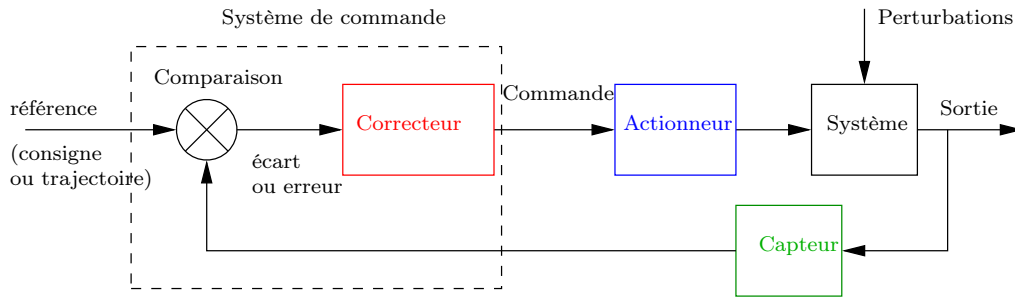


FIGURE 1 – Structure générale d'un système asservi.

**Remarque 2.1** Commentaires - dans le cas des S.L.T.I SISO Un correcteur possède une représentation entrée-sortie caractérisée, *p. ex.*, par une fonction de transfert. L'équation différentielle correspondant à cette fonction de transfert caractérise l'expression temporelle d'une loi d'évolution de la commande en fonction de la mesure de la sortie : on la désigne par **loi de commande**.

La démarche qui consiste à trouver une loi de commande *appropriée* se nomme **synthèse** de loi de commande. Elle s'appuie sur la recherche de telles lois<sup>7</sup> permettant au système asservi de vérifier certaines propriétés correspondant aux objectifs recherchés.

## 3 Objectifs recherchés avec un asservissement

### 3.1 Performances

La commande en boucle fermée doit permettre en tout premier lieu de garantir un niveau de précision de la réponse du système par rapport à la consigne qui lui est appliquée tout en minimisant, et même rejetant totalement, les effets induits par l'occurrence d'une perturbation. Cette précision est généralement exigée avec un temps de réponse réduit : le système asservi doit donc être rapide.

Il s'agit donc de garantir **précision, rapidité et rejet de perturbation**.

### 3.2 Robustesse de la stabilité

Cette commande en boucle fermée n'étant calculée qu'à partir d'un modèle mathématique nominal, ne reproduisant que de façon imparfaite la réalité, la loi de commande doit garantir les propriétés précédentes en dépit d'*incertitudes de modélisation*, de nature *paramétrique* ou de l'absence de modélisation de phénomènes *négligeables* et donc négligés lors de la synthèse.

Il s'agit donc de garantir des performances de façon **robuste aux incertitudes**.

Soit la fonction de transfert d'un système *L.T.I. S.I.S.O.*

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \tag{4}$$

$$= \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \tag{5}$$

Il convient de distinguer différentes catégories d'incertitudes de modèles :

- Une *incertitude* de type *fréquentielle*  $\Delta H(p)$  telle que la véritable fonction de transfert du système s'écrirait  $H_r(p) = H(p) + \Delta H(p)$ .  $\Delta H(p)$  contient des pôles et des zéros volontairement négligés lorsqu'ils sont plus rapides que les pôles et zéros du phénomène prépondérant à asservir.  $\Delta H(p)$  peut aussi être choisi de manière à majorer convenablement le gain de dynamiques mal connues.

<sup>7</sup>. exprimées le plus souvent, en ce qui concerne ce cours, sous la forme d'une fonction de transfert

- Des *incertitudes paramétriques*  $\delta a_i$  et  $\delta b_j$  affectant les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  de la fonction de transfert :  $a_{i,r} = a_i + \delta a_i$  ;  $b_{j,r} = b_j + \delta b_j$ . Généralement, ce type d'incertitudes affectent plutôt des paramètres physiques du système et deviennent plus complexe à caractériser à travers l'expression d'une fonction de transfert mise sous la forme (5).

### 3.3 Stabilité

L'asservissement d'un système présente également quelques contreparties. La première d'entre elle est que le système, une fois bouclé par le système de commande, doit être **stable** ! En effet, l'injection d'énergie supplémentaire dans le système, si elle est mal maîtrisée, peut rendre un système naturellement stable en un système totalement instable<sup>8</sup>.

### 3.4 Mise en œuvre

La mise en œuvre d'un asservissement fait appel à des organes technologiques possédant des **limites physiques**. Par exemple, les actionneurs de puissances sont limités en énergie admissible ou en énergie transmissible. Cela se traduit par la **saturation** du signal de commande à des valeurs souvent plus basses que ne l'exigerait un objectif recherché.

Dans le cas des systèmes *L.T.I.*, on prendra garde à faire la synthèse de lois de commande qui ne sollicitent pas « trop » les saturations présentes dans la chaîne d'asservissement.

### 3.5 Régulation et Suivi de consigne

#### Définition 3.1 Régulation

Dans une structure d'asservissement, *p. ex.* celle de la figure 1, la consigne de référence peut être un signal de valeur constante, dont on souhaite que la sortie du système suive avec les propriétés décrites ci-dessus, tout en rejetant les perturbations. On parle alors d'un problème de régulation.

Exemple : La régulation de température par « un système de climatisation ».

#### Définition 3.2 Suivi de consigne - ou *problème de poursuite*.

C'est lorsque le signal de référence évolue dans le temps et qu'un signal de sortie doit le suivre avec rapidité, précision et stabilité.

## 4 Fonctions de sensibilité

On considère une structure d'asservissement typique, voir Figure 2 avec un correcteur  $C(p)$  dans la chaîne directe, où l'on fait apparaître la perturbation du système ramenée à son entrée de commande et du bruit de mesure sur la sortie mesurée.

- $r$  est le signal de référence,
- $u$  est le signal de commande généré par la correcteur  $C(p)$ ,
- $v$  est le signal de commande entrant réellement dans le système,
- $y$  est la sortie mesurée,
- $w$  est le signal du bruit de mesure,
- $b$  est le signal des perturbations,
- $\varepsilon$  est le signal d'écart.

Pour la structure Figure 2, on montre aisément que :

$$y(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)C(p)} b(p) + \frac{H(p)C(p)}{1 + H(p)C(p)} (r(p) - w(p)) \quad (6)$$

---

8. effet opposé à celui recherché!

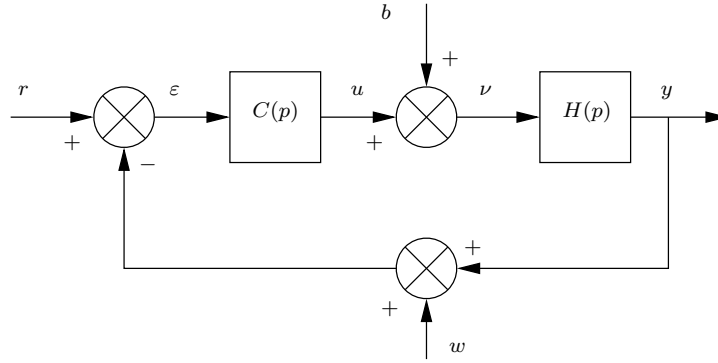


FIGURE 2 – Structure d’asservissement avec bruit de mesure et perturbation en entrée.

### 4.1 Définitions

**Définition 4.1** Transfert de boucle ouverte :  $L(p)$

$$L(p) = H(p)C(p). \tag{7}$$

**Définition 4.2** Fonction de sensibilité :  $S(p)$

$$S(p) = \frac{1}{1 + L(p)}. \tag{8}$$

Elle représente le transfert entre la référence  $r(p)$  et l’erreur  $\varepsilon(p)$  ainsi qu’entre la perturbation  $b(p)$  et la commande délivrée  $\nu(p)$ .

**Définition 4.3** Fonction de sensibilité complémentaire :  $T(p)$

$$T(p) = \frac{L(p)}{1 + L(p)}. \tag{9}$$

Elle représente l’influence des bruits de mesure  $w(p)$  sur la sortie  $y(p)$  et l’erreur ainsi qu’entre la perturbation  $b(p)$  et la commande réellement appliquée  $\nu(p)$ .

### 4.2 Propriétés remarquables

On a la propriété remarquable suivante :

**Propriété 1**

$$S(p) + T(p) = 1. \tag{10}$$

A l’aide des définitions précédentes, on en déduit l’expression de relations essentielles pour caractériser l’influence du correcteur sur les propriétés de l’asservissement :

$$\varepsilon(p) = S(p)r(p) - S(p)H(p)b(p) + T(p)w(p), \tag{11}$$

$$u(p) = C(p)S(p)(r(p) - w(p)) - T(p)b(p), \tag{12}$$

$$\nu(p) = C(p)S(p)(r(p) - w(p)) + S(p)b(p). \tag{13}$$

Ces relations mettent en évidence les fonctions de sensibilités supplémentaires suivantes :

**Définition 4.4** Fonction de sensibilité  $S(p)H(p)$

Elle représente l’influence de la perturbation  $b(p)$  sur la sortie  $y(p)$  et l’erreur  $\varepsilon(p)$ .

**Définition 4.5** Fonction de sensibilité  $S(p)C(p)$

Elle représente l’influence de la référence  $r(p)$  et des bruits de mesure  $w(p)$  sur les commandes  $u(p)$  et  $\nu(p)$ .

Une analyse préalable de ces fonctions de sensibilité permet de définir un gabarit de comportement fréquentiel du transfert de boucle ouvert  $L(p)$  et d’en déduire l’allure fréquentielle de  $C(p)$  en fonction des objectifs de commande.

### 4.3 Objectifs de commande courants

- Un bon suivi du signal de référence nécessite une fonction de sensibilité  $S(p)$  faible en module dans la bande de fréquence contenant le spectre fréquentiel du signal de consigne (c'est généralement un spectre passe-bas).
- Un bon rejet des perturbations est assuré si le module de  $S(p)H(p)$  est faible dans la bande de fréquence contenant le spectre fréquentiel des perturbations (en général les basses fréquences).
- L'effet des bruits de mesure est atténué si le module de  $T(p)$  est faible dans la bande de fréquence contenant le spectre fréquentiel des bruits de mesure (en général les hautes fréquences).
- Les commandes sont peu sollicitées en amplitude si le module de  $S(p)C(p)$  est faible dans la bande de fréquence contenant le spectre du signal de consigne.
- L'effet des perturbations sur les commandes est faible si le module de  $S(p)$  et  $T(p)$  sont de module faibles.

**Remarque 4.1** Remarquons le caractère contradictoire imposé aux fonctions de sensibilités de par la relation (10). Cela suppose de *gérer des compromis* lors de la synthèse d'un correcteur, en pénalisant plus ou moins certains objectifs de commande dans une zone de fréquence où ils ont plus ou moins d'importance.

La méthode de synthèse de correcteur dans le domaine fréquentiel qui consiste à pénaliser le gain de  $L(p)$  dans certaines zones fréquentielles s'appuie plus généralement sur le modelage du gain de cette fonction de transfert de boucle ouverte  $L(p)$  afin de satisfaire à certains compromis imposés aux fonctions de sensibilité. Cette méthode est connue sous le nom de *loopshaping* en anglais, ou façonnage de boucle ouverte.

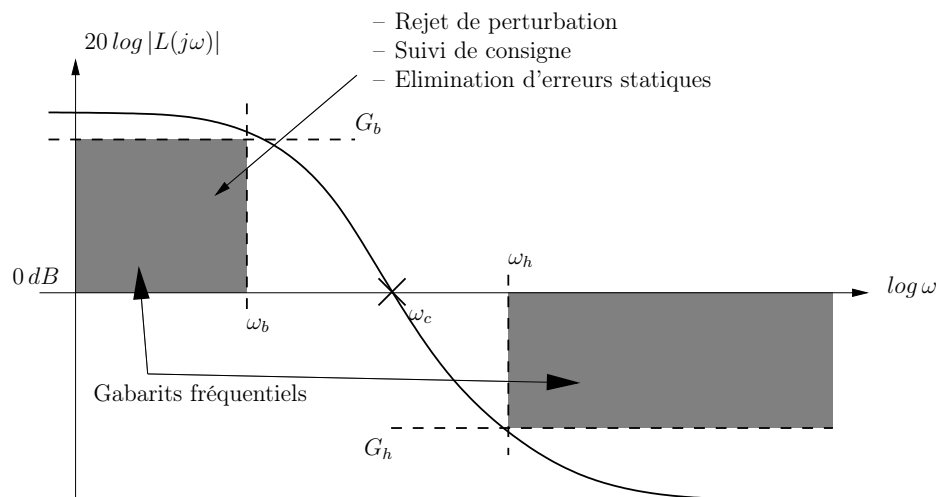


FIGURE 3 – Façonnage typique du gain du transfert de boucle ouverte : *Loopshaping*

## 5 Analyse de la stabilité d'un asservissement

Considérons la structure d'asservissement Figure 2. D'après la définition d'une équation caractéristique pour l'analyse de la stabilité d'un système, l'équation caractéristique du système en boucle fermée, dans le cas présent, s'écrit :

$$1 + L(p) = 0 \tag{14}$$

soit

$$1 + H(p)C(p) = 0. \tag{15}$$

En posant  $L(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ , l'équation caractéristique devient :

$$D(p) + N(p) = 0 \tag{16}$$

Ainsi l'étude de la stabilité du système bouclé passe par l'étude des racines de l'équation caractéristique. **Le système asservi sera stable si, et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.**

Nous présentons par la suite un critère d'analyse de la stabilité d'un asservissement qui s'appuie sur la seule connaissance du comportement du système en boucle ouverte.

Nous allons étudier une approche graphique d'analyse de la stabilité d'un asservissement à partir de divers diagrammes représentant la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte  $L(p)$ .

### 5.1 Critère de Nyquist

C'est un critère graphique de stabilité reposant sur l'analyse de la réponse fréquentielle du transfert de boucle  $L(p)$  dans le plan de Nyquist. Il suppose au préalable de définir le contour de Nyquist associé. Un tel critère repose sur le théorème de Cauchy (admis) suivant :

**Théorème 3** *Théorème de Cauchy (admis)*

Soit  $H(p)$  une fraction rationnelle en  $p$  sous la forme :

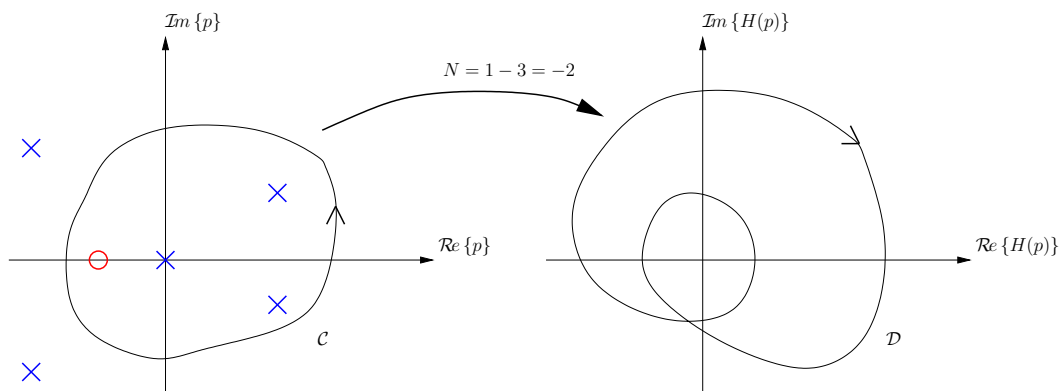
$$H(p) = K \frac{\prod_{k=0}^m (p - z_k)}{\prod_{k=0}^n (p - p_k)} \tag{17}$$

Soit  $C$  un contour fermé et orienté qui ne passe par aucun pôle ou zéro de  $H(p)$ .

Quand le point d'affixe  $p$  décrit complètement la courbe fermée  $C$  dans un sens donné, le point d'affixe  $H(p)$  décrit une courbe  $D$  qui encercle l'origine, dans le même sens que le parcours de  $p$  sur  $C$ , un nombre de fois égal à

$$N = Z - P$$

où  $Z$  et  $P$  désignent respectivement le nombre de zéros et de pôles à l'intérieur du contour fermé  $C$  en comptant l'ordre de multiplicité de chaque pôle ou zéro.



#### Définition 5.1 Contour de Nyquist

Le contour de Nyquist  $C_N$  est défini dans le plan complexe en  $p \in \mathbb{C}$ . Il est *orienté* dans le sens *anti-trigonométrique* et est composé de l'axe imaginaire pur fermé  $[-j\infty, +j\infty]$ , du demi cercle de rayon infini et centré à l'origine  $p = 0 + j0$ , et englobant le demi-plan complexe droit. Ce contour est associé à la fonction de transfert en boucle ouverte  $L(p) = H(p)C(p)$ . Il ne doit pas inclure ou passer par les singularités de  $L(p)$  c'est-à-dire par ses pôles ou ses zéros.

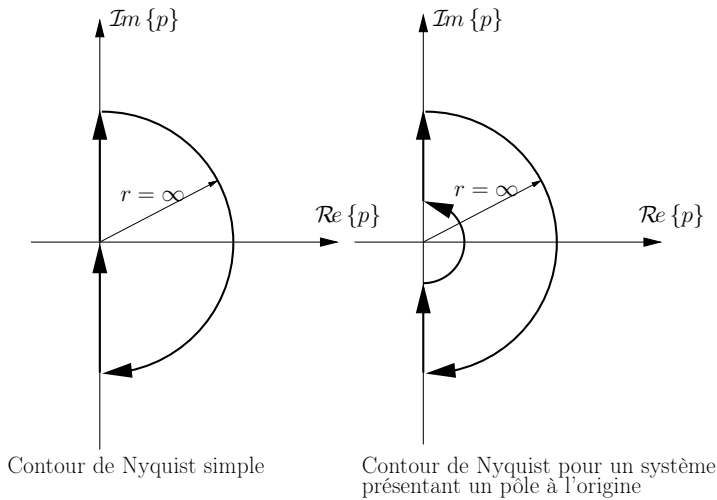
Lorsque certains pôles ou zéros sont sur l'axe imaginaire, le contour devra contenir des indentations permettant d'exclure localement ces singularités du contour.

La figure 5 montre de quelle façon peut on définir une indentation destinée à exclure le pôle instable nul  $p = 0 + j0$  et la figure 4 montre de quelle façon peut on intégrer cette indentation dans le contour de Nyquist.

Dans ce cas, l'indentation est définie dans le plan complexe par  $p = \rho \exp j\theta$  où  $\rho \rightarrow 0$  et  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

De manière générale, il faut s'attacher au principe qui consiste à définir un contour de Nyquist **analytique** dans le plan complexe, et faire en sorte que celui-ci ait une expression analytique la plus simple tout en respectant le nécessité d'exclusion des singularités.





Contour de Nyquist simple

Contour de Nyquist pour un système présentant un pôle à l'origine

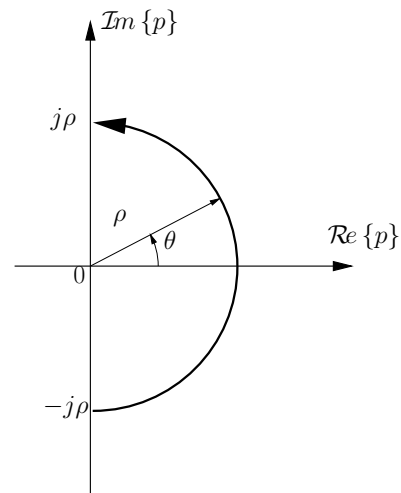


FIGURE 5 – Exemple d'indentation possible pour exclure un pôle à l'origine.

FIGURE 4 – Contour de Nyquist simple et modifié pour prendre en compte un pôle à l'origine (un intégrateur).

**Définition 5.2** lieu de Nyquist complet

C'est le lieu défini comme étant l'image du contour de Nyquist par la fonction de transfert en boucle ouverte  $L(p)$ . Autrement dit, lorsque  $p = \sigma + j\omega$  parcourt  $C_N$ , la fonction de transfert  $L(p) = H(p)C(p)$  parcourt le lieu de Nyquist complet dans le plan de Nyquist  $(\text{Re}\{L(j\omega)\}, \text{Im}\{L(j\omega)\})$ . Ce contour est ainsi constitué par :

- Le lieu de  $L(p)$ , pour  $p = \omega \geq 0$  dans le plan de Nyquist  $(\text{Re}\{L(j\omega)\}, \text{Im}\{L(j\omega)\})$ ,
- son symétrique par rapport à l'axe des réels correspondant au lieu de  $L(p)$  pour  $p = \omega \leq 0$ ,
- l'image de chaque indentation lorsqu'il y en a. Celles-ci sont fréquemment associées à des fermetures du contour.

**Théorème 4** Énoncé du critère

Les pôles du systèmes bouclé<sup>9</sup> Figure 2 sont à partie réelle strictement négative<sup>10</sup> si, et seulement si le lieu de Nyquist complet de  $L(p)$  entoure dans le sens trigonométrique, le **point critique**  $-1 + j0$  un **nombre algébrique de fois égal au nombre de pôles de  $L(p)$  à partie réelle strictement positive**.

**Méthode d'analyse graphique de la stabilité par le critère de Nyquist**

1. Calcule le transfert de boucle ouverte  $L(p)$  de l'asservissement considéré.
2. Dénombrer le nombre de pôles sur l'axe imaginaire et définir le contour de Nyquist  $C_N$  incluant les indentations nécessaires.
3. Tracer graphiquement le lieu de Nyquist. Se servir pour cela de la description de ce lieu au paragraphe 5.2.
4. Compter le nombre de tours **N** dans le **sens trigonométrique** autour du point critique  $-1 + j0$ .
5. Compter le nombre **P** de **pôles instables en boucle ouverte**, c'est-à-dire ceux de  $L(p)$ . Le nombre **Z** de **pôles instables en boucle fermée** est alors déterminé par la relation :

$$Z = P - N$$

## 6 Stabilité interne des systèmes bouclés

### 6.1 Exemple introductif

Prenons l'exemple suivant associé à la structure d'asservissement Figure 2 :

$$H(p) = \frac{1 - p}{p^2(1 + p)} \quad C(p) = \frac{1 + 2p}{1 - p}$$

9. c'est-à-dire les racines de l'équation caractéristique  $1 + L(p) = 0$   
 10. autrement dit, le système bouclé est asymptotiquement stable

Les fonctions de sensibilité associées se déduisent aisément et conduisent à :

$$S(p) = \frac{p^2(1+p)}{p^3 + p^2 + 2p + 1}, \quad C(p)S(p) = \frac{p^2(1+2p)(1+p)}{(1-p)(p^3 + p^2 + 2p + 1)},$$

$$T(p) = \frac{2p+1}{p^3 + p^2 + 2p + 1}, \quad H(p)S(p) = \frac{1-p}{p^3 + p^2 + 2p + 1}.$$

La fonction de sensibilité  $C(p)S(p)$  possède un pôle instable  $p = 1$  alors que toutes les autres fonctions de sensibilités sont elles stables. Cette fonction de transfert traduisant la sensibilité de la commande aux signaux de références et de bruit de mesure, les conséquences sur le comportement du système bouclé sont immédiates.

Par conséquent, toutes les fonctions de transferts possibles d'une structure d'asservissement donnée doivent être stables.

### 6.2 Notion de structure de commande *bien posée*

La stabilité interne d'un système est sujette à la notion de structure de commande « bien posée ». Pour cela considérons la structure d'interconnexion de systèmes représentée Figure 6.

Cette interconnexion de  $H(p)$  et  $C(p)$  est caractérisée par la relation :

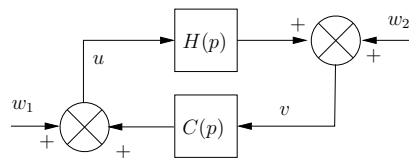


FIGURE 6 – Interconnexion standard pour le test de stabilité interne.

$$\begin{bmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -C(p) \\ -H(p) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(p) \\ v(p) \end{bmatrix} \tag{18}$$

#### Définition 6.1 boucle bien posée

La structure de commande Fig. 6 est dite bien posée si toutes les fonctions de transfert en boucle fermée possibles de cette structure sont bien définies et propres.

**Propriété 2** L'interconnexion représentée Figure 6 et formalisée par l'équation (18), est dite bien posée si, et seulement si la matrice de transfert

$$\begin{bmatrix} 1 & -C(p) \\ -H(p) & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

existe pour  $p \rightarrow \infty$  et est propre.

### 6.3 Critère d'analyse de stabilité interne

#### Théorème 5 Stabilité interne

L'interconnexion Figure 6 est stable de manière interne si, et seulement si toutes les fonctions de transfert entre le vecteur d'entrées  $[ w_1 \ w_2 ]$ , et le vecteur des sorties  $[ u \ v ]$  ne possèdent pas de pôles à partie réelle positive.

$$H_{w_1u}(p) = \frac{H(p)C(p)}{1 - H(p)C(p)}, \quad H_{w_1v}(p) = \frac{H(p)}{1 - H(p)C(p)}$$

$$H_{w_2u}(p) = \frac{C(p)}{1 - H(p)C(p)}, \quad H_{w_2v}(p) = \frac{1}{1 - H(p)C(p)}.$$

Le théorème suivant est appelé « *théorème du petit gain* ». C'est un critère d'analyse qui donne une **condition suffisante** de stabilité interne d'une interconnection. Contrairement au critère énoncé en 6.3, il ne s'appuie que sur la connaissance de la réponse fréquentielle du transfert de boucle ouverte  $L(p)$ .

**Théorème 6** *Théorème du petit gain (admis)*

Les systèmes  $G(p)$  et  $C(p)$  étant supposés stables asymptotiquement séparément, l'interconnection de ces systèmes suivant la structure Figure 6 est stable de manière interne si

$$\max_{\omega} |H(j\omega)C(j\omega)| < 1$$

## 7 Marges de stabilité ou degrés de stabilité

L'équation caractéristique (14) montre que le comportement des racines du système en boucle fermée dépend du comportement de  $L(p)$  vis-à-vis du nombre  $-1 + j0$ .

**Définition 7.1** Point critique

C'est le point du plan complexe d'affixe  $-1 + j0$ .

**Définition 7.2** Pulsations caractéristiques

✓  $\omega_{c0}$  désigne la pulsation de coupure à 0 dB du transfert en boucle ouverte  $L(p)$  :

$$|L(j\omega_{c0})| = 1 \tag{19}$$

$$20 \log |L(j\omega_{c0})| = 0 \text{ dB} \tag{20}$$

✓  $\omega_{-180^\circ}$  désigne la pulsation pour laquelle la phase du transfert en boucle ouverte  $L(p)$  vaut  $-180^\circ$  (ou  $-\pi \text{ rad}$ ) :

$$\arg(L(j\omega_{-180^\circ})) = -180^\circ \tag{21}$$

**Définition 7.3** Marge de gain

C'est la quantité de gain, notée  $\Delta G$ , définie à partir du transfert en boucle ouverte  $L(p)$  :

$$\Delta H = \frac{1}{|L(j\omega_{-180^\circ})|} \tag{22}$$

$$\Delta H_{dB} = -20 \log (|L(j\omega_{-180^\circ})|) \tag{23}$$

On peut l'interpréter comme la plus petite variation de gain admissible dans le transfert en boucle ouverte  $L(p)$  avant l'apparition de racines instables dans l'équation caractéristique  $1 + L(p) = 0$  ou, de manière équivalente, avant de rendre instable le système en boucle fermée.

**Définition 7.4** Marge de phase

C'est la quantité de phase, notée  $\Delta\phi$ , définie à partir du transfert en boucle ouverte  $L(p)$  :

$$\Delta\phi = \arg(L(j\omega_{c0})) - (-180^\circ) \tag{24}$$

$$= \arg(L(j\omega_{c0})) + 180^\circ \tag{25}$$

On peut l'interpréter comme la plus petite variation de phase admissible dans le transfert en boucle ouverte  $L(p)$  avant l'apparition de racines instables dans l'équation caractéristique  $1 + L(p) = 0$  ou, de manière équivalente, avant de rendre instable le système en boucle fermée.

**Propriété 3** *Stabilité caractérisée par les marges de gain et de phase*

Le système est stable en boucle fermée si la marge de phase et la marge de gain en dB du transfert de boucle ouverte sont positives.

## 8 Précision d'un asservissement

En reprenant les équations de la structure d'asservissement Fig. 1 et en considérant le système bouclé stable, sans perturbation ( $b(p) = 0$ ) ni bruit de mesure ( $w(p) = 0$ ), la relation (11) donnant l'expression de l'erreur d'asservissement devient

$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= r(p) - y(p) = S(p) r(p) \\ &= \frac{r(p)}{1 + L(p)}, \\ &= \frac{r(p)}{1 + H(p)C(p)}.\end{aligned}$$

### Définition 8.1 Précision statique

Elle est caractérisée par l'erreur d'asservissement, en régime permanent, du système bouclé Fig. 1 soumis à une consigne  $r(t)$  de type échelon ( $r(t) = r_0 \mathbf{1}_0^+(t)$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^*$ ) :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t). \quad (26)$$

Cette quantité est appelée *erreur statique* ou *erreur de position*.

Le théorème de la valeur finale permet de réécrire (26) ainsi,

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p r(p)}{1 + H(p)C(p)} \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{r_0}{1 + H(p)C(p)}\end{aligned}$$

### Définition 8.2 Précision dynamique

Cette propriété des systèmes asservis intervient dès que la consigne évolue continûment au cours du temps. En particulier, pour une consigne de type rampe ( $r(t) = r_0 t$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^*$ ), l'erreur d'asservissement associée est appelée *erreur de vitesse* et pour une consigne de type parabolique ( $r(t) = r_0 t^2$ ,  $r_0 \in \mathbb{R}^*$ ), l'erreur d'asservissement correspondante est appelée *erreur d'accélération*.

Supposons que le transfert de boucle ouverte puisse s'écrire sous la forme  $L(p) = \frac{K \tilde{N}(p)}{p^c \tilde{D}(p)} = \frac{K}{p^c} \frac{1 + \tilde{n}_1 p + \dots}{1 + \tilde{d}_1 p + \dots}$  où  $K \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{N}$  est un nombre entier appelé *classe du transfert de boucle ouverte*. Pour  $c = 0$ ,  $K$  correspond au gain statique de  $L(p)$  ( $K = L(0)$ ). En considérant une consigne du type échelon, rampe, parabole *etc* ..., on a  $r(p) = \frac{r_0}{p^k}$  pour  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Dans ce cas, on peut établir la relation suivante entre  $\varepsilon(p)$  et  $r(p)$

$$\varepsilon(p) = \frac{r_0}{p^k + p^k K \frac{\tilde{N}(p)}{\tilde{D}(p)}}. \quad (27)$$

En régime permanent, on a

$$\varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t), \quad (28)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p), \quad (29)$$

$$= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{r_0}{p^{k-1} + p^{k-1-c} K \frac{\tilde{N}(p)}{\tilde{D}(p)}}. \quad (30)$$

On peut alors dresser le tableau suivant Tab. 1. Ce tableau permet de prédire à l'avance la précision d'un système asservi suivant sa classe, c'est-à-dire suivant le nombre d'intégrateurs purs présent dans le transfert de boucle ouverte  $L(p)$ . Pour quelques les paires (classe de système, consigne), le tableau montre que l'erreur est inversement proportionnelle au gain statique du transfert de boucle ouverte  $L(p)$ . Toutefois, on prendra garde à ne pas trop augmenter le gain  $K$  en vue de réduire cette erreur asymptotique, au risque de réduire les marges de stabilité et rendre le système asservi très oscillant.

On pourra par exemple vérifier cette remarque sur un système de classe 1.

consigne	échelon $r(p) = \frac{r_0}{p}$	rampe $r(p) = \frac{r_0}{p^2}$	parabole $r(p) = \frac{r_0}{p^3}$	...
classe 0	$\frac{r_0}{1+K}$	$\infty$	$\infty$	...
classe 1	0	$\frac{r_0}{K}$	$\infty$	...
classe 2	0	0	$\frac{r_0}{K}$	...

TABLE 1 – Précision des systèmes *L.T.I. S.I.S.O.* asservis, en fonction de leur classe.

**Remarque 8.1** Quoi qu'il en soit, c'est le théorème de la valeur finale qui a permis d'aboutir à l'écriture de l'erreur d'asservissement (30), en fonction de la classe du système.

**Remarque 8.2** En présence de perturbation, il conviendra de reprendre et d'adapter la démarche précédente.

## 9 Réglage de correcteurs

Fort de toutes les indications des sections précédentes, nous allons aborder le réglage de quelques correcteurs fondamentaux afin de répondre à des exigences typiques d'un cahier des charges d'asservissement.

### 9.1 Objectifs

Les principales propriétés recherchées portent sur l'amortissement de la réponse indicielle, la précision statique ou dynamique, le temps de réponse à 5%, la bande passante, le rejet de perturbation *etc.* Il est souvent impossible de satisfaire un cahier des charges « extrémiste » où l'on chercherait à obtenir un système asservi rapide et stable avec de bonnes marges.

Répondre à un cahier des charges traduisant des exigences de :

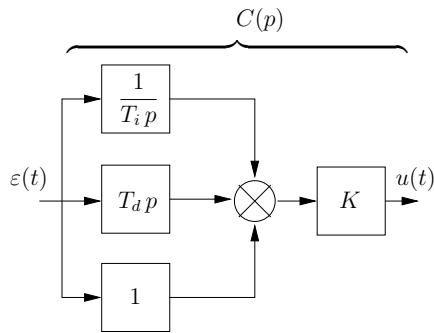
**stabilité** : c'est un impératif absolu, sans quoi le système est inutilisable. On cherchera aussi à obtenir des marges de stabilité *confortables*, évitant ainsi des réponses transitoires mal amorties. On considère qu'une marge de phase d'environ  $45^\circ$  et une marge de gain d'environ  $10\text{ dB}$  conduit à un amortissement acceptable du régime transitoire. Au delà, le système amorti s'en trouverait hyper-amorti, donc pas assez rapide voire très lent.

**rapidité** : elle est liée à la bande passante. Toutefois, l'augmentation de la rapidité se fait au détriment de sa stabilité avec une marge de phase qui décroît de manière concomitante.

**précision** : son amélioration peut être faite en augmentant le gain du transfert de boucle ouverte (ce qui risque de réduire la marge de phase) ou en augmentant la classe du système.

**robustesse** : cela correspond à la capacité du système asservi de restituer de bonnes performances en présence de perturbation. La présence d'intégrateurs en amont de la perturbation permet d'éliminer certaines classes de perturbation (constante, polynômiale, sinusoïdale, *etc.*)

9.2 Correcteurs PID



Il s'agit de correcteurs dont la loi de commande est dite à action *Proportionnelle-Intégrale-Dérivée*. Reprenant la structure d'asservissement Fig. 1, cela correspond à  $C(p)$  donné par l'un des cas suivants

- Proportionnelle  $\rightarrow u(t) = K \varepsilon(t) \rightarrow C(p) = K$
- Proportionnelle-Intégrale  $\rightarrow u(t) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) du \right) \rightarrow C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$
- Proportionnelle-Dérivée  $\rightarrow u(t) = K \left( 1 + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right) \rightarrow C(p) = K (1 + T_d p)$
- Proportionnelle-Intégrale-Dérivée  $\rightarrow u(t) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right) \rightarrow C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$

En pratique, pour un système à asservir donné, il s'agira d'utiliser le correcteur adapté, c'est-à-dire celui dont les actions peuvent apporter du gain et/ou de la phase dans la bande de fréquence d'intérêt pour le cahier des charges. Pour cela, il faut connaître les principales propriétés de chaque action.

**Action proportionnelle :** Le tableau 1 montre que la précision du système est améliorée lorsque le gain du transfert de boucle ouverte augmente. Cette accroissement du gain correspond à l'action d'un correcteur proportionnel. En contrepartie, la stabilité diminue si le gain augmente. Cela illustre la dualité stabilité-précision précédemment évoquée. Le temps de montée est réduit et le système devient plus oscillant. En revanche, une augmentation du gain proportionnel ne diminue pas nécessairement le temps de réponse du système.

**Action intégrale :** L'ajout d'un terme intégral dans le transfert de boucle ouverte augmente sa classe et donc, se précision. Par exemple, un système en boucle ouverte, stable et sans terme intégral, c'est-à-dire de classe 0, voit son erreur statique annulée par l'insertion d'une action intégrale. En contrepartie, la marge de phase est diminuée de  $90^\circ$  par l'ajout de cette intégration pure. Enfin, un correcteur à action intégral présente un inconvénient majeur : celui de saturer la commande rapidement si l'erreur ne s'annule pas. Il faut éventuellement envisager l'ajout d'un dispositif d'anti-saturation.

**Action dérivée :** Dans le cas d'un système de classe supérieure ou égale à 1, cette action permet d'augmenter la bande passante ou de rendre le système plus stable, à bande passante égale. Toutefois, un correcteur à action dérivée pure amplifie dramatiquement les bruits hautes-fréquences. De plus, il est important de noter qu'un correcteur à action dérivée idéale n'est pas causal et ne peut donc pas être physiquement réalisable. En pratique, on la remplace systématiquement par une action dérivée approchée en filtrant le terme dérivé par un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre. Ainsi, le terme dérivé  $T_d p$  du correcteur est remplacé par l'approximation causale  $\frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{10^N} p}$ , où  $N \in \mathbb{N}$  est suffisamment grand. La forme déduite du PID par filtrage du terme dérivé est dite forme standard du correcteur PID :

$$C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \frac{T_d}{10^N} p} \right) \tag{31}$$

Les actions précédentes sont généralement combinées pour donner lieu aux correcteurs fréquemment rencontrés (souvent appelés « correcteurs industriels ») comme le correcteur proportionnel (P), le proportionnel-intégral (PI) ou le retard de phase (PI approché), le proportionnel-dérivé (PD) ou le correcteur à avance de phase (PD approché) et enfin le PID ou réseau à avance et retard de phase (PID approché).