

Codes fontaine pour les applications multicast structure, décodage et optimisation

Auguste Venkiah

ETIS/ENSEA/CNRS UMR 8051

Mardi 2 octobre 2007

Directeur de thèse : David Declercq

Co-encadrant : Charly Poulliat

Financement : Projet ANR/RNRT DIVINE



Plan

- 1 Contexte et problématique
- 2 Codes fontaine
- 3 Optimisation pour le canal BIAWGN
- 4 Conclusion



Plan

- 1 Contexte et problématique
- 2 Codes fontaine
- 3 Optimisation pour le canal BIAWGN
- 4 Conclusion



- Projet RNRT DIVINE : Diffusion de Video et Images vers des terminaux mobiles hétérogènes par des liens hétérogènes.
- Problématique de codage :
 - Codage pour une diffusion multicast/broadcast
 - Codage distribué “Multipoint to multipoint” (P2P)
 - Codage sans canal de retour “Point to Point” (liaison satellite)



Solutions classiques de transmission

ARQ Retransmission de paquets (ex : couche de transport TCP)

→ congestion rapide du réseau

→ possible uniquement si un canal de retour est disponible

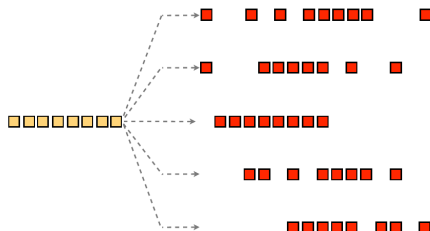
FEC Codes en bloc pour la perte par paquets : nécessité de connaître *a priori* le canal

→ en multicast, chaque utilisateur voit un canal différent



Applications "Point to Multipoint"

Diffusion multicast sur une liaison sans canal de retour : aucune solution classique ne convient.



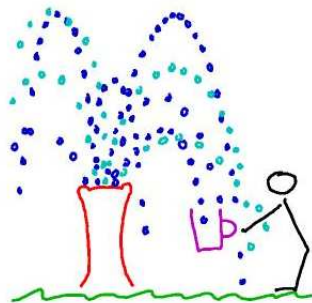
Plan

- 1 Contexte et problématique
- 2 Codes fontaine**
- 3 Optimisation pour le canal BIAWGN
- 4 Conclusion



L'approche des codes fontaine

- Emission continue d'un flot infini de paquets encodés
- Chaque utilisateur reçoit des paquets éventuellement différents
- La reception de paquets *quelconques* permet de retrouver le message
→ pas de retransmission



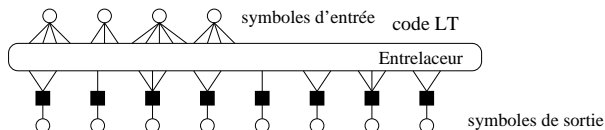
Des codes "sans rendement" (?)

- $R_{LT} \triangleq \frac{\text{Nb symboles d'entrée}}{\text{Nb symboles nécessaires pr decoder}} = \frac{\Omega'(1)}{\alpha}$
- Overhead ϵ : $R(1 + \epsilon) = C$



Un code LT : une fontaine de bits de parité

- degré : nb bits intervenant dans une équation de parité
- $d \sim \Omega(\cdot)$: Tirer un degré d suivant une loi discrète Ω appelée “distribution des degrés” : $\Omega(d) = P(\text{degré} = d)$
- Choisir aléatoirement d bits d'information
- Bit encodé = somme ($\% 2$) de ces d bits d'information



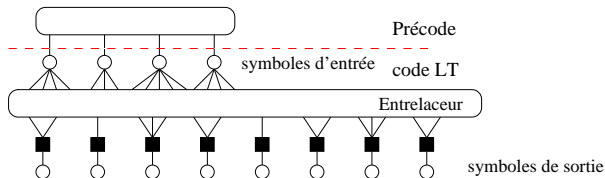
Cette famille de codes atteint la capacité sur canal BEC (Luby, 1998).
...mais la complexité (encodage/décodage) est en $O(K \log(K))$



Code raptor = code LT + précode

Extension des codes LT (Shokrollahi, 2003), normalisés pour 3GPP.

- But : obtenir une complexité de décodage linéaire
- Idée : introduire un code correcteur d'erreurs de rendement très élevé avant le code fontaine
- $\Omega(\cdot)$ caractérise complètement les performances du code.
→ Comment choisir (optimiser) une bonne distribution ?



Analogies avec les codes LDPC

Similitudes :

- Algorithme de décodage : Propagation de croyances (BP) (code à décodage itératif SISO)
- Représentation par un graphe de Tanner (graphe bipartite)
→ caractérisation du décodeur par évolution de densité

Différences :

- Code sans rendement (rendement *a posteriori*)
- Le décodage d'un code LT ne "converge" pas
- Structure de code concaténé
- Mise en oeuvre : graphe dynamique (aléatoire)

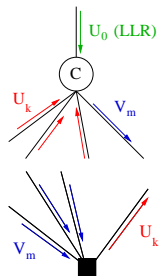


Plan

- 1 Contexte et problématique
- 2 Codes fontaine
- 3 Optimisation pour le canal BIAWGN**
- 4 Conclusion



Algorithme de décodage : propagation de croyances (BP)



$$v_m = u_0 + \sum_{k=1, k \neq m}^i u_k$$

$$\tanh \frac{u_k}{2} = \prod_{m=1; m \neq k}^j \tanh \frac{v_m}{2}$$

- Graphe sans cycle (arbre!) : décodage optimal (MAP)
- Graphe avec des cycles : décodage sous-optimal (itératif)
- Etude asymptotique : $N \rightarrow \infty \Rightarrow$ Taille des cycles $\rightarrow \infty$
- Pour l'étude : localement on étudie un arbre ($N_{it} <$ longueur du cycle minimal)
- Etude asymptotique : évolution de densité (densité de probabilité des messages)



Analyse par EXIT chart : principe

EXIT : EXtrinsic mutual Information Transfer

- 1 Code linéaire : mot de code nul
- 2 Probabilisation des messages sur le graphe ($\log(\frac{p_0}{p_1})$ supposées *i.i.d.*)
- 3 Approximation gaussienne : les messages sont symétriques et gaussiens $\sim \mathcal{N}(m, 2m)$

- 4 Information mutuelle associée : $x = J(m)$

$$J(m) = 1 - \frac{1}{\sqrt{4\pi m}} \int_{\mathbb{R}} \log_2(1 + e^{-\nu}) \exp\left(\frac{-(\nu-m)^2}{4m}\right) d\nu$$

- 5 Evolution de l'IM d'une itération de décodage à l'autre :

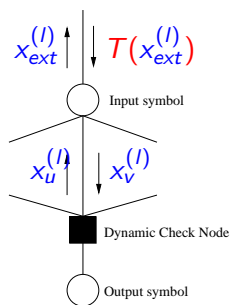
$$x_u^{(l)} = F(x_u^{(l-1)})$$

Analyse des conditions sous lesquelles

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_u^{(l)} = 1 \iff P_e^{(l)} \rightarrow 0$$



Notations



- $x_u^{(l)}$ = IM : noeud parité \rightarrow donnée
- $x_v^{(l)}$ = IM : noeud donnée \rightarrow parité
- $x_{ext}^{(l)}$ = IM : code LT \rightarrow précode
- $T(\cdot)$ = Fonction de transfert du précode

- Symboles d'entrée : connectés suivant une loi de Poisson :

$$l(x) = \sum_{i=1}^{d_v} l_i x^i = e^{\alpha(x-1)}$$
$$\rightarrow \iota(x) = e^{\alpha(x-1)}$$

- Noeuds de parité : connectés suivant la distribution des degrés :

$$\Omega(x) = \sum_{i=1}^{d_c} \Omega_i x^i$$
$$\rightarrow \omega(x) = \sum_{i=1}^{d_c} \omega_i x^{i-1} = \Omega'(x)/\Omega'(1).$$



Equations d'évolution de l'information mutuelle

(sous hypothèse asymptotique et sous approximation gaussienne ...)

- MAJ aux noeuds de données par BP :

$$x_v^{(l)} = \sum_{i=1}^{d_c} \iota_i J\left(\left(i-1\right)J^{-1}\left(x_u^{(l-1)}\right) + J^{-1}\left(T\left(x_{\text{ext}}^{(l-1)}\right)\right)\right) \quad (1)$$

- MAJ aux noeuds de parité par BP :

$$x_u^{(l)} = 1 - \sum_{j=1}^{d_v} \omega_j J\left(\left(j-1\right)J^{-1}\left(1-x_v^{(l)}\right) + f_0\right) \quad (2)$$

- MAJ de l'information extrinsèque apportée au précode :

$$x_{\text{ext}}^{(l)} = \sum_i l_i J\left(iJ^{-1}\left(x_u^{(l)}\right)\right) \quad (3)$$

- Paramétrisation du code
- Observation du canal
- Evolution de l'information mutuelle



Equations d'évolution de l'information mutuelle

$$x_u^{(l)} = 1 - \sum_{j=1}^{d_v} \omega_j J \left((j-1) J^{-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{d_c} l_i J \left((i-1) J^{-1} (x_u^{(l-1)}) \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left. + J^{-1} \left(T \left(\sum_i l_i J (i J^{-1} (x_u^{(l-1)})) \right) \right) \right) + f_0 \right) \right) \right) \quad (4)$$

$$x_u^{(l)} = F(x_u^{(l-1)}, \sigma^2, T(\cdot)) \quad (5)$$

- Paramétrisation du code
- Observation du canal
- Evolution de l'information mutuelle

⇒ Equation linéaire en les coefficients ω_j



Formulation du problème d'optimisation

Pour une valeur de α et une valeur de σ^2 , le problème d'optimisation s'écrit :

$$\omega_{opt}(x) = \arg \min_{\omega(x)} \sum_j \frac{\omega_j}{j} \quad (6)$$

Assujetti aux contraintes suivantes :

$$[C_1] \sum_i \omega_i = 1$$

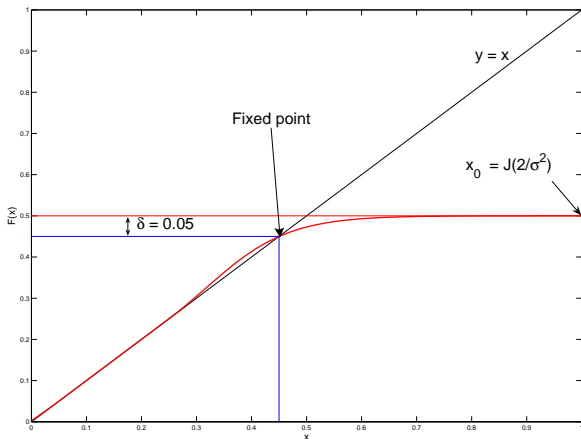
$$[C_2] F(x, \sigma^2, T(\cdot)) > x \quad \forall x \in [0; x_0 - \delta] \quad \text{pour } \delta > 0$$

$$[C_3] F(0, \sigma^2, T(\cdot)) > \varepsilon \quad \text{pour } \varepsilon > 0$$

$$[C_4] F'(0, \sigma^2, T(\cdot)) > 1$$



Interprétation graphique : EXIT chart

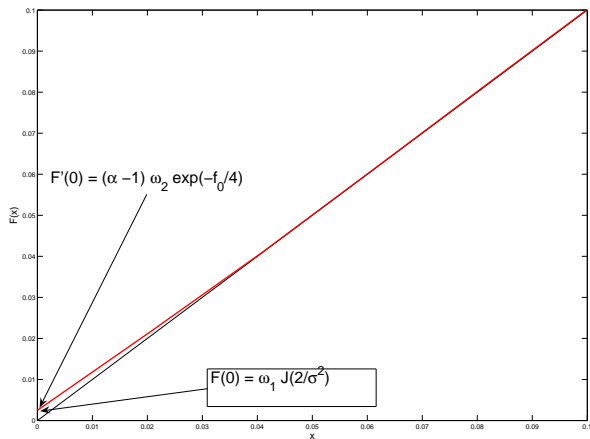


(IM des messages sur le graphe de la fontaine)



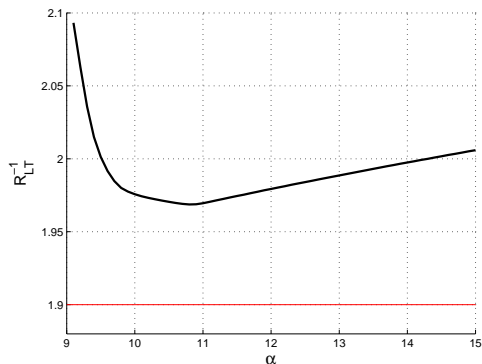
Interprétation graphique : EXIT chart

Zoom pour $x \in [0; 0.1]$



Paramètre α

Pour des valeurs croissantes de α , optimisation d'une distribution pour un canal de capacité $C = 0.5$ ($\sigma = 0.9786$), et calcul de $R_{LT}^{-1} = \frac{\Omega'(1)}{\alpha}$.



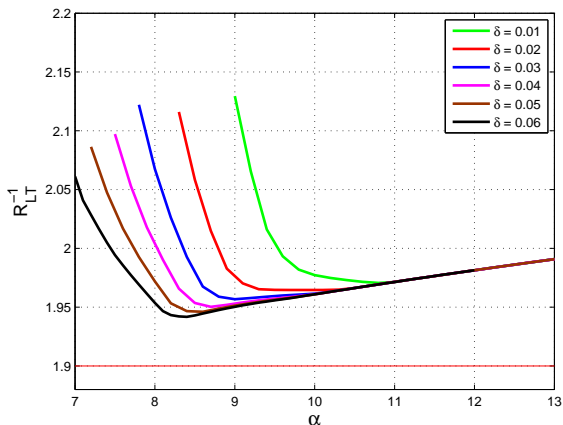
\Rightarrow Il existe une valeur de α qui maximise le rendement (minimise l'overhead)



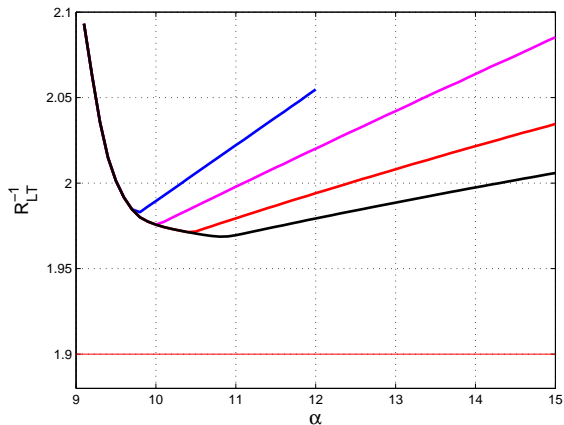
Paramètre δ

Le paramètre δ doit être

- suffisamment petit pour assurer un point de convergence
- suffisamment haut. $x_{ext} = \sum_i I_i J(iJ^{-1}(x_u^{(\infty)}))$
- pas trop petit pour ne pas pénaliser le rendement asymptotique

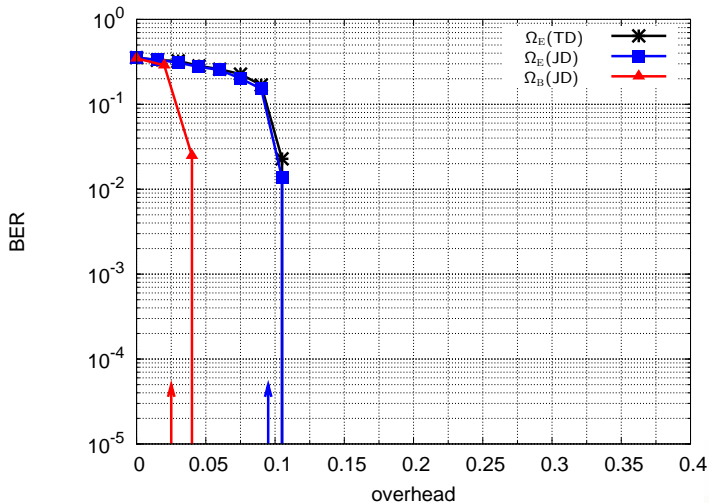


Paramètre d_c



Résultats de simulation

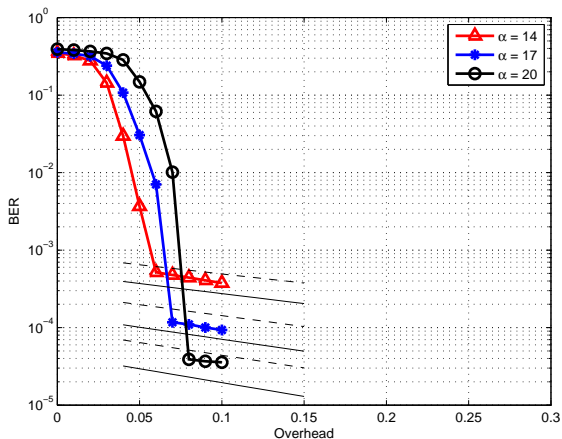
$K = 65000, C = 0.5 (\sigma = 0.9787)$



Caractérisation du plancher d'erreur d'un code LT

Code LT : cas particulier d'un code raptor

Caractérisation asymptotique du plancher d'erreurs



$$K = 65000, C = 0.5 (\sigma = 0.9787)$$



Plan

- 1 Contexte et problématique
- 2 Codes fontaine
- 3 Optimisation pour le canal BIAWGN
- 4 Conclusion



Résumé

Etude et optimisation des codes raptor sur canal gaussien :

- Algorithme de décodage : BP
- Hypothèse asymptotique + approximation gaussienne
- Equations d'évolution de l'information mutuelle
→ caractérisation analytique du décodeur
- Optimisation d'une distribution = pb d'optimisation linéaire
→ fonction de coût : "rendement *a posteriori*"

Résultats principaux :

- Analyse du décodage conjoint (précode/fontaine)
- Borne sur ω_1 : il faut contraindre le problème d'optimisation
- Borne sur ω_2 pour une séquence qui atteint la capacité
- Etude de l'influence des paramètres d'optimisation



Etat d'avancement et perspectives

Publications :

- Travaux présentés à ISIT (juin 2007) et au GRETSI (sept 2007)
- 1 article soumis à IEEE Trans. on Commun.
- 1 soumission à ICC'08 + 1 article de revue en préparation






Extensions du travail présenté aujourd'hui :

- Optimisation de codes LT (cas particulier)
- Bornes sur le taux d'erreur résiduel d'un code LT
- Optimisation d'un précode LDPC
- Comportement à seuil des codes raptor
- Robustesse par rapport au mauvais dimensionnement de σ
- Performances à petite taille ($K < 5000$)

Perspectives :

- Codeur de source en précode ?
- Codes LT pour le canal BSC ?
- ...des idées ? :D



-  Sae-Young Chung, Thomas J. Richardson and Rudiger Urbanke,
“Analysis of sum product decoding of low density parity check codes
using a gaussian approximation,”
IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 47, no. 2, pp. 657–670, Feb. 2001.
-  Michael Luby,
“LT codes,”
in *Proc. of STOC*, 2002, pp. 271–280.
-  Amin Shokrollahi,
“Raptor codes,”
IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, pp. 2551–2567, June 2006.
-  Omid Etesami and Amin Shokrollahi,
“Raptor codes on binary memoryless symmetric channels,”
IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 52, pp. 2033–2051, May 2006.
-  Auguste Venkiah, Charly Poulliat and David Declercq,
“Analysis and design of raptor codes for joint decoding using
information content evolution,”
in *Proc. of the IEEE ISIT, France*, 2007.

