Transformée en z inverse

1 Méthode par décomposition en éléments simples

Soit $W(z)$ la transformée en z d'un signal numérique causal w_k. Le principe de cette méthode repose sur la décomposition en éléments simples de $\frac{W(z)}{z}$ plutôt que $W(z)$, puis sur l'utilisation d'un tableau des transformées en z usuelles. Soit $k \in \mathbb{N}$ la variable temporelle discrète désignant l'instant $t = k\,T_e$ (où $T_e > 0$ désigne la période d'échantillonnage).

Cas de pôles distincts, non nuls

Soient $p_i, p_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $p_i \neq p_j$ $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$ avec $i \neq j$.

$$W(z) = C_0 + \frac{C_1 z}{z - p_1} + \ldots + \frac{C_n z}{z - p_n}$$

où $C_0 = W(0)$ et $C_i = \lim\limits_{z \to p_i} (z - p_i) \frac{W(z)}{z}$. Il est à noter que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{C_j z}{z - p_j}\right\} = C_j {p_j}^k.$$

Exemple : $W(z) = \dfrac{z + 3}{(z - 1)\,(z + 2)}$.

Cas d'un pôle multiple non-nul $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, de multiplicité $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$

$$W(z) = \ldots + \frac{C_1 z}{z - p} + \frac{C_2 z}{(z - p)^2} + \ldots + \frac{C_l z}{(z - p)^l} + \ldots$$

On montre que $C_{l-j} = \lim\limits_{z \to p} \left(\dfrac{1}{j!} \dfrac{\partial^j \left((z - p)^l \, \frac{W(z)}{z} \right)}{\partial z^j} \right)$, $\forall j = 0, 1, \ldots, l - 1$.

Il est à noter que

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z - p)^l}\right\} = \frac{1}{(l - 1)!} k\,(k - 1) \ldots (k - l + 2)\, p^{k - l + 1}, \quad k \geq 0.$$

Exemple : $W(z) = \dfrac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2\,(z - 2)} = C_0 + \dfrac{C_1 z}{z - 1} + \dfrac{C_2 z}{(z - 1)^2} + \dfrac{C_3 z}{z - 2}$. Les coefficients sont alors donnés par

$$\begin{aligned}
C_0 &= 0 \\
C_2 &= \lim_{z \to 1} \left(\frac{(z - 1)^2}{z} \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2\,(z - 2)} \right) = \ldots = -1 \\
C_1 &= \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}} \left(\frac{(z - 1)^2}{z} \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2\,(z - 2)} \right) = \ldots = -1 \\
C_3 &= \lim_{z \to 2} \left(\frac{z - 2}{z} \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2\,(z - 2)} \right) = \ldots = 2
\end{aligned}$$

Par conséquent, $w_k = -1 - k + 2^{k+1}$, $k \geq 0$.

Cas d'un pôle nul, $p = 0$, de multiplicité $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$

$$W(z) = C_0 + \ldots + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \ldots + \frac{C_l}{z^l} + \ldots$$

On montre que $C_0 = W(0)$ et $C_{l-j} = \lim\limits_{z \to 0} \left(\dfrac{1}{j!} \dfrac{\partial^j \left(z^l \frac{W(z)}{z} \right)}{\partial z^j} \right)$, $\forall j = 0, 1, \ldots, l-1$.

Il est à noter que pour tout nombre entier d,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-d}\right\} = \delta_{k-d}, \quad k \geq 0 \;:\; \text{impulsion unité retardée de } d \text{ coups.}$$

2 Méthode des résidus : *(pour information seulement)*

Formule d'inversion, dite intégrale

Soit $X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k}$, $\forall z \in \mathcal{D}$ où $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| > R_0\}$ est le domaine de convergence (R_0 rayon de convergence).

$z^{n-1} X(z) = z^{n-1} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k}$

Soit Γ un contour fermé du plan complexe, entourant l'origine et appartenant au domaine de convergence $\mathcal{D}$ ($|z| > R_0$).

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma z^{n-1} X(z) dz &= \int_\Gamma \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k} dz \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \int_\Gamma z^{n-1-k} dz.
\end{aligned}$$

- ***Théorème de Cauchy***

> *Si Γ est un contour fermé entourant l'origine, alors*
>
> $$\int_\Gamma \frac{dz}{z^m} = \begin{cases} 2\pi j & \textit{si } m = 1 \\ 0 & \textit{si } m \neq 1 \end{cases} .$$

Ainsi,

$$\int_\Gamma z^{n-1-k} dz = \int_\Gamma \frac{dz}{z^{k+1-n}} = \begin{cases} 2\pi j & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases} .$$

Par conséquent, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k \int_\Gamma z^{n-1-k} dz = j 2\pi x_n$. D'où la

- ***Formule d'inversion***

> $$\begin{aligned}
> x_k &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \qquad (|z| > R_0) \\
> &= \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma z^{k-1} X(z) dz
> \end{aligned}$$
>
> *où $\Gamma \subset \mathcal{D}$*

Calcul de l'intégrale $x_k = \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma z^{k-1}X(z)dz$ par la méthode des résidus

- ***Notation***

$$x_k = \sum_{\substack{z_i=\text{pôles}\\ \text{de } z^{k-1}X(z)}} \text{Rés}\left\{z^{k-1}X(z)\right\}\Big|_{z=z_i} \left(= \frac{1}{2\pi j}\int_\Gamma z^{k-1}X(z)dz\right)$$

où $\text{Rés}\left\{z^{k-1}X(z)\right\}\Big|_{z=z_i}$ *désigne le résidu.*

- ***Formule générale***

Soit $G(z)$ *une fonction de transfert et* $z_i \in \mathbb{C}$ *un pôle multiple de* $G(z)$ *d'ordre* n_i.

$$\text{Rés}\{G(z)\}|_{z=z_i} = \frac{1}{(n_i-1)!}\lim_{z\to z_i}\frac{\partial^{n_i-1}\left((z-z_i)^{n_i}G(z)\right)}{\partial z^{n_i-1}}$$

- ***Cas particuliers***

  – *pour un pôle simple* a : $\text{Rés}\{G(z)\}|_{z=a} = \lim_{z\to a}(z-a)\,G(z)$

  – *Si* $H(z)$ *est holomorphe en* $z=a$ *(c'est-à-dire lorsque* a *n'est pas un pôle de* $H(z)$*)* : $\text{Rés}\{G(z)H(z)\}|_{z=a} = H(a)\ \text{Rés}\{G(z)\}|_{z=a}$

  – *Si* $z=a$ *est un zéro simple de* $G(z)$: $\text{Rés}\left\{\frac{1}{G(z)}\right\}\Big|_{z=a} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}G(z)}{\mathrm{dz}}\right|_{z=a}}$.

  De plus, pour $H(z)$ *holomorphe en* $z=a$: $\text{Rés}\left\{\frac{H(z)}{G(z)}\right\}\Big|_{z=a} = \frac{H(a)}{\left.\frac{\mathrm{d}G(z)}{\mathrm{dz}}\right|_{z=a}}$

  – *Si* $z=a$ *est un zéro multiple (d'ordre* n*) de* $G(z)$: $\text{Rés}\left\{\frac{G'(z)}{G(z)}\right\}\Big|_{z=a} = n$.

  De plus, pour $H(z)$ *holomorphe en* $z=a$: $\text{Rés}\left\{\frac{H(z)G'(z)}{G(z)}\right\}\Big|_{z=a} = H(a)n$

  – *Si* $z=a$ *est un pôle multiple (d'ordre* n*) de* $G(z)$: $\text{Rés}\left\{\frac{G'(z)}{G(z)}\right\}\Big|_{z=a} = -n$

Exemple

Soit $X(z) = \dfrac{z}{(z-a)(z-b)}$ la transformée en z d'un signal causal, pour $|z| > \max|a|,|b|$.

$$\begin{aligned}
x_k &= \sum_{\substack{z_i=\text{pôles}\\ \text{de } z^{k-1}X(z)}} \text{Rés}\left\{z^{k-1}X(z)\right\}\Big|_{z=z_i} \\
&= \text{Rés}\left\{\frac{z^k}{(z-a)(z-b)}\right\}\Big|_{z=a} + \text{Rés}\left\{\frac{z^k}{(z-a)(z-b)}\right\}\Big|_{z=b} \\
&= \left.\frac{z^k}{(z-a)(z-b)}\right|_{z=a} + \left.\frac{z^k}{(z-a)(z-b)}\right|_{z=b} \\
&= \frac{a^k}{(a-b)} + \frac{b^k}{(b-a)} \\
&= \frac{a^k-b^k}{(a-b)}
\end{aligned}$$