

## Transformée en $z$ inverse

### 1 Méthode par décomposition en éléments simples

Soit  $W(z)$  la transformée en  $z$  d'un signal numérique causal  $w_k$ . Le principe de cette méthode repose sur la décomposition en éléments simples de  $\frac{W(z)}{z}$  plutôt que  $W(z)$ , puis sur l'utilisation d'un tableau des transformées en  $z$  usuelles. Soit  $k \in \mathbb{N}$  la variable temporelle discrète désignant l'instant  $t = kT_e$  (où  $T_e > 0$  désigne la période d'échantillonnage).

#### Cas de pôles distincts, non nuls

Soient  $p_i, p_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $p_i \neq p_j \forall i, j = 1, 2, \dots, n$  avec  $i \neq j$ .

$$W(z) = C_0 + \frac{C_1 z}{z - p_1} + \dots + \frac{C_n z}{z - p_n}$$

où  $C_0 = W(0)$  et  $C_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i) \frac{W(z)}{z}$ . Il est à noter que

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{C_j z}{z - p_j} \right\} = C_j p_j^k.$$

**Exemple :**  $W(z) = \frac{z + 3}{(z - 1)(z + 2)}$ .

#### Cas d'un pôle multiple non-nul $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , de multiplicité $l \in \mathbb{N}$ , $l \geq 1$

$$W(z) = \dots + \frac{C_1 z}{z - p} + \frac{C_2 z}{(z - p)^2} + \dots + \frac{C_l z}{(z - p)^l} + \dots$$

On montre que  $C_{l-j} = \lim_{z \rightarrow p} \left( \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \left( (z - p)^l \frac{W(z)}{z} \right)}{\partial z^j} \right)$ ,  $\forall j = 0, 1, \dots, l - 1$ .

Il est à noter que

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z - p)^l} \right\} = \frac{1}{(l - 1)!} k(k - 1) \dots (k - l + 2) p^{k-l+1}, \quad k \geq 0.$$

**Exemple :**  $W(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2(z - 2)} = C_0 + \frac{C_1 z}{z - 1} + \frac{C_2 z}{(z - 1)^2} + \frac{C_3 z}{z - 2}$ . Les coefficients sont alors donnés par

$$C_0 = 0$$

$$C_2 = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{(z - 1)^2}{z} \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2(z - 2)} \right) = \dots = -1$$

$$C_1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left( \frac{(z - 1)^2}{z} \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2(z - 2)} \right) = \dots = -1$$

$$C_3 = \lim_{z \rightarrow 2} \left( \frac{z - 2}{z} \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z - 1)^2(z - 2)} \right) = \dots = 2$$

Par conséquent,  $w_k = -1 - k + 2^{k+1}$ ,  $k \geq 0$ .

Cas d'un pôle nul,  $p = 0$ , de multiplicité  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l \geq 1$

$$W(z) = C_0 + \dots + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \dots + \frac{C_l}{z^l} + \dots$$

On montre que  $C_0 = W(0)$  et  $C_{l-j} = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{1}{j!} \frac{\partial^j \left( z^l \frac{W(z)}{z} \right)}{\partial z^j} \right)$ ,  $\forall j = 0, 1, \dots, l - 1$ .

Il est à noter que pour tout nombre entier  $d$ ,

$$\mathcal{Z}^{-1}\{z^{-d}\} = \delta_{k-d}, \quad k \geq 0 : \text{impulsion unité retardée de } d \text{ coups.}$$

## 2 Méthode des résidus : (pour information seulement)

### Formule d'inversion, dite intégrale

Soit  $X(z) = \mathcal{Z}\{x_k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k}$ ,  $\forall z \in \mathcal{D}$  où  $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| > R_0\}$  est le domaine de convergence ( $R_0$  rayon de convergence).

$$z^{n-1} X(z) = z^{n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k}$$

Soit  $\Gamma$  un contour fermé du plan complexe, entourant l'origine et appartenant au domaine de convergence  $\mathcal{D}$  ( $|z| > R_0$ ).

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} z^{n-1} X(z) dz &= \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{+\infty} x_k z^{-k} dz \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \int_{\Gamma} z^{n-1-k} dz. \end{aligned}$$

■ **Théorème de Cauchy**

Si  $\Gamma$  est un contour fermé entourant l'origine, alors

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^m} = \begin{cases} 2\pi j & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{si } m \neq 1 \end{cases} .$$

Ainsi,

$$\int_{\Gamma} z^{n-1-k} dz = \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^{k+1-n}} = \begin{cases} 2\pi j & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases} .$$

Par conséquent,  $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \int_{\Gamma} z^{n-1-k} dz = j2\pi x_n$ . D'où la

■ **Formule d'inversion**

$$\begin{aligned} x_k &= \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \quad (|z| > R_0) \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^{k-1} X(z) dz \end{aligned}$$

où  $\Gamma \subset \mathcal{D}$

Calcul de l'intégrale  $x_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^{k-1} X(z) dz$  par la méthode des résidus

■ **Notation**

$$x_k = \sum_{\substack{z_i = \text{pôles} \\ \text{de } z^{k-1} X(z)}} \text{Rés} \{ z^{k-1} X(z) \} \Big|_{z=z_i} \left( = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^{k-1} X(z) dz \right)$$

où  $\text{Rés} \{ z^{k-1} X(z) \} \Big|_{z=z_i}$  désigne le résidu.

■ **Formule générale**

Soit  $G(z)$  une fonction de transfert et  $z_i \in \mathbb{C}$  un pôle multiple de  $G(z)$  d'ordre  $n_i$ .

$$\text{Rés} \{ G(z) \} \Big|_{z=z_i} = \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{\partial^{n_i-1} ((z - z_i)^{n_i} G(z))}{\partial z^{n_i-1}}$$

■ **Cas particuliers**

- pour un pôle simple  $a$  :  $\text{Rés} \{ G(z) \} \Big|_{z=a} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) G(z)$
- Si  $H(z)$  est holomorphe en  $z = a$  (c'est-à-dire lorsque  $a$  n'est pas un pôle de  $H(z)$ ) :  $\text{Rés} \{ G(z)H(z) \} \Big|_{z=a} = H(a) \text{Rés} \{ G(z) \} \Big|_{z=a}$
- Si  $z = a$  est un zéro simple de  $G(z)$  :  $\text{Rés} \left\{ \frac{1}{G(z)} \right\} \Big|_{z=a} = \frac{1}{\frac{dG(z)}{dz} \Big|_{z=a}}$ .

De plus, pour  $H(z)$  holomorphe en  $z = a$  :  $\text{Rés} \left\{ \frac{H(z)}{G(z)} \right\} \Big|_{z=a} = \frac{H(a)}{\frac{dG(z)}{dz} \Big|_{z=a}}$

- Si  $z = a$  est un zéro multiple (d'ordre  $n$ ) de  $G(z)$  :  $\text{Rés} \left\{ \frac{G'(z)}{G(z)} \right\} \Big|_{z=a} = n$ .

De plus, pour  $H(z)$  holomorphe en  $z = a$  :  $\text{Rés} \left\{ \frac{H(z)G'(z)}{G(z)} \right\} \Big|_{z=a} = H(a)n$

- Si  $z = a$  est un pôle multiple (d'ordre  $n$ ) de  $G(z)$  :  $\text{Rés} \left\{ \frac{G'(z)}{G(z)} \right\} \Big|_{z=a} = -n$

**Exemple**

Soit  $X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$  la transformée en  $z$  d'un signal causal, pour  $|z| > \max |a|, |b|$ .

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{\substack{z_i = \text{pôles} \\ \text{de } z^{k-1} X(z)}} \text{Rés} \{ z^{k-1} X(z) \} \Big|_{z=z_i} \\ &= \text{Rés} \left\{ \frac{z^k}{(z-a)(z-b)} \right\} \Big|_{z=a} + \text{Rés} \left\{ \frac{z^k}{(z-a)(z-b)} \right\} \Big|_{z=b} \\ &= \frac{z^k}{(z-a)(z-b)} \Big|_{z=a} + \frac{z^k}{(z-a)(z-b)} \Big|_{z=b} \\ &= \frac{a^k}{(a-b)} + \frac{b^k}{(b-a)} \\ &= \frac{a^k - b^k}{(a-b)} \end{aligned}$$