



Master IST
Information
Systèmes
Technologie



Université Paris-Sud XI - ENS de Cachan
Master IST1 & IFIPS EI2, UE majeures 421-422

COMMANDE DES PROCESSUS
ASSERVISSEMENTS NUMÉRIQUES
Notes de cours

S. TLIBA
M. JUNGERS
Y. CHITOUR

Ce polycopié rassemble des **notes de cours**. Il a pour vocation de n'être qu'un support au cours associé l'UE majeure (421-422) intitulée *Commande des Processus*. L'absence d'exemples traités est volontaire. Par conséquent, ce document ne dispense en aucun cas les étudiants de leur présence au cours magistral.

Nous remercions le Professeur P. Lesage pour ses suggestions.

En vue d'une amélioration constante, toute remarque et commentaire sont les bienvenus.

Les auteurs

Version provisoire de septembre 2005 []

Table des matières

1	Introduction à l'asservissement numérique	1
1.1	Principe de l'asservissement numérique	1
1.2	Structure d'un asservissement numérique	2
2	Modélisation des signaux échantillonnés	4
2.1	Définition	4
2.2	Signaux usuels	6
2.3	Théorème de Shannon	6
3	Transformée en z d'un signal échantillonné	8
3.1	Transformée en z	8
3.1.1	Définition de la transformée en z	8
3.1.2	Propriétés de la transformée en z	10
3.2	Transformée en z inverse	11
4	Bloqueurs & Convertisseurs	12
4.1	Bloqueurs	12
4.1.1	Bloqueur d'ordre zéro	12
4.1.2	Bloqueur d'ordre un	14
4.2	Modélisation des CAN et CNA	14
4.2.1	Cas du CAN	14
4.2.2	Cas du CNA	15
4.3	Classification des différents signaux	16
5	Fonction de transfert en z de systèmes échantillonnés	18
5.1	Filtre numérique linéaire	18
5.2	Systèmes en série	21
5.3	Asservissement échantillonné	23
5.4	Exemple illustratif	25
5.5	Asservissement à retour non unitaire	26
5.5.1	Système à un seul échantillonneur	26
5.5.2	Système à deux échantillonneurs	27
6	Etude de la stabilité	29
6.1	Condition générale de stabilité	29
6.2	Critères algébriques	30
6.2.1	Critère <i>matriciel</i> de Schur-Cohn	31
6.2.2	Critère de Jury : <i>présenté pour le cas $n=2$</i>	34
6.2.3	Critère de Routh-Hurwitz	35
6.3	Critères géométriques	38

6.3.1	Critère de Nyquist	38
6.3.2	Lieu de Bode et lieu de Black-Nichols	40
6.3.3	Lieu des racines (ou lieu d'Evans)	40
7	Etude de la précision	41
7.1	Précision statique	41
7.2	Précision dynamique	43
8	Correction des asservissements	44
8.1	Objectifs de la correction	44
8.2	Correcteurs séries : généralités	45
8.2.1	Structure d'un correcteur série	45
8.2.2	Mise en équation	45
8.3	Correcteurs à réponse pile	45
8.4	Correcteur PID numérique	47
8.4.1	Structure du PID numérique	47
8.4.2	Choix du correcteur	48
8.4.3	Méthode de TAKAHASHI de réglage du PID numérique	49
8.4.4	Commentaires	51
9	Correspondance analogique-numérique	52
9.1	Équivalence du B.O.Z. à un retard pur de $T/2$	52
9.2	Correction numérique par discrétisation d'un correcteur continu	53
9.2.1	Approximations de l'opérateur intégral	53
9.2.2	Techniques d'invariants	54
10	Contrôleur RST	56
10.1	Asservissement échantillonné classique	56
10.2	Asservissement numérique avec contrôleur RST	57
10.3	Conséquences sur les relations de récurrences	58
10.4	Rejet de Perturbation par RST	59
10.5	Synthèse par RST	60
11	Rappels mathématiques	61
11.1	Polynômes	61
11.2	Suites récurrentes de longueur finie	63
11.3	Décomposition en éléments simples	65
11.4	Applications aux fractions rationnelles	65

Chapitre 1

Introduction à l'asservissement numérique

1.1 Principe de l'asservissement numérique

Afin de mettre en œuvre les asservissements en milieu industriel, l'usage d'outils informatiques comme organes de contrôle des processus asservis est essentiel. C'est le cas par exemples des ordinateurs ou des microcontrôleurs qui peuvent, entre autre, assumer des fonctions de calculateurs numériques. Mais de tels instruments sont à base de composants électroniques (microprocesseurs, mémoires, ...) et fonctionnent avec des signaux binaires, porteurs d'informations numériques, on parle alors de *signaux numériques*. Se pose alors un problème fondamental, à savoir qu'un outil numérique ne peut s'accommoder de *signaux analogiques*, pourtant quasi exclusifs dans la majorité des systèmes physiques. En effet, le mode de traitement des informations imposé par un ordinateur est de nature numérique et cadencé dans le temps de façon périodique grâce à une horloge. Le temps et l'amplitude du signal sont donc des grandeurs discrètes. Schématiquement, cela signifie que tout signal vivant dans l'ordinateur est une suite de nombres.

Les problèmes qu'il s'agit de résoudre pour le contrôle des processus continus concernent les points suivants :

- (a) **l'échantillonnage d'un signal continu** : cette opération consiste à relever les informations prises par un signal continu à intervalle de temps régulier, appelé *période d'échantillonnage*. On parle alors de *signal échantillonné*. Cela signifie que le calculateur ne tiendra compte que des *échantillons*, c'est-à-dire des valeurs prises par le signal aux *instants d'échantillonnage*.
- (b) **la conversion d'un signal analogique en un signal numérique** : il s'agit de convertir la valeur prise par un signal analogique à l'instant d'échantillonnage en une valeur numérique afin qu'elle soit traitée par le calculateur. Un tel signal peut, par exemple, provenir d'un capteur. On parlera alors de *signal de mesure*.
- (c) **la conversion d'un signal numérique en un signal analogique** : cette opération consiste à transformer le signal numérique issu du calculateur à l'instant d'échantillonnage (on parlera de *signal numérique de commande*), en *signal analogique de commande* existant sur toute la période d'échantillonnage, l'objectif étant de commander le système physique.
- (d) **la synthèse d'un algorithme de calcul** : il s'agit d'établir une loi d'évolution du signal de commande numérique en fonction des signaux de mesure et de référence, également numériques, afin de permettre au système asservi de satisfaire un cahier

des charges. Cette fonction est appelée *correcteur numérique* ou encore *loi de commande numérique*. Elle a pour objectif de déterminer la valeur du signal numérique de commande à un instant d'échantillonnage, à partir des valeurs antérieures des signaux numériques de commande, de mesure et de référence. Concrètement, la *loi de commande numérique* s'exprime comme une *relation de récurrence* qui permet aisément son implémentation dans un calculateur numérique.

■ Définitions

- L'objet permettant de réaliser les opérations (a)-(b) s'appelle un Convertisseur-Analogique-Numérique (abbr. **CAN**).
- L'objet permettant de réaliser l'opération (c) s'appelle un Convertisseur-Numérique-Analogique (abbr. **CNA**).

Remarques :

- Dans la pratique, le signal analogique traité par le CAN est quantifié sur une échelle finie de valeurs. La quantification de l'amplitude du signal échantillonné implique donc une approximation de la valeur réelle du signal analogique correspondant. Cela peut aboutir à la propagation d'erreurs d'arrondis dans le calculateur et avoir des conséquences sur le comportement global du système asservi (précision, stabilité, robustesse...). Bien que cela ne fasse pas l'objet de ce cours, il est important de noter que l'étude de la quantification et du codage est essentielle pour la mise en œuvre pratique d'un asservissement numérique.
- Dans le cadre de ce cours, la loi de commande numérique est une fonction *linéaire* en les variables de commande, de mesure et de référence et à coefficients constants.
- Dans ces notes de cours, on aura tendance, par abus de langage, à appeler échantillonnage, l'ensemble de la chaîne de transformation du signal, conversion comprise. Cela est sans conséquence, puisque les modèles que nous allons étudier prennent en compte la description globale, de la transformation du signal jusqu'à la suite de nombres correspondante.

1.2 Structure d'un asservissement numérique

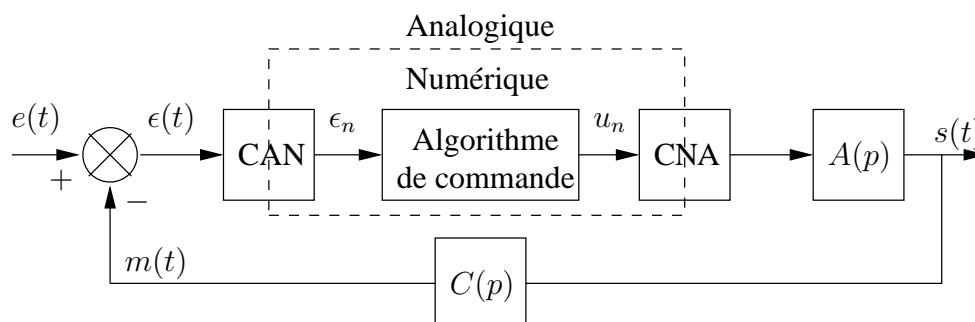


FIG. 1.1 – Structure typique de la réalisation d'un asservissement numérique.

L'asservissement numérique se fait typiquement par le biais d'une structure schématisée par la figure 1.1 et composée des objets fondamentaux suivants :

1. un *comparateur* : celui-ci fournit un signal d'écart $\epsilon(t)$ qui réalise la différence entre le signal analogique de référence $e(t)$ et le signal analogique de mesure $m(t)$.
2. un CAN : celui-ci fonctionne à la période d'échantillonnage $T > 0$. Il fournit à sa sortie le signal numérique d'écart noté ϵ_n .
3. un algorithme de commande : celui-ci manipule des suites de nombres et a pour fonction d'élaborer la loi de commande. Il délivre donc le signal numérique de commande u_n .
4. un CNA : celui-ci fonctionne à la période d'échantillonnage $T > 0$. Il transforme le signal numérique de commande issu du calculateur en le signal analogique de commande correspondant.
5. des *transmittances* $A(p)$ et $C(p)$ représentant respectivement la dynamique du système et celle du capteur.

En pratique, l'opération de comparaison se fait également numériquement. Ainsi, une autre structure typique d'asservissement peut être schématisée par la figure 1.2 où nous pouvons remarquer la présence d'un CAN supplémentaire.

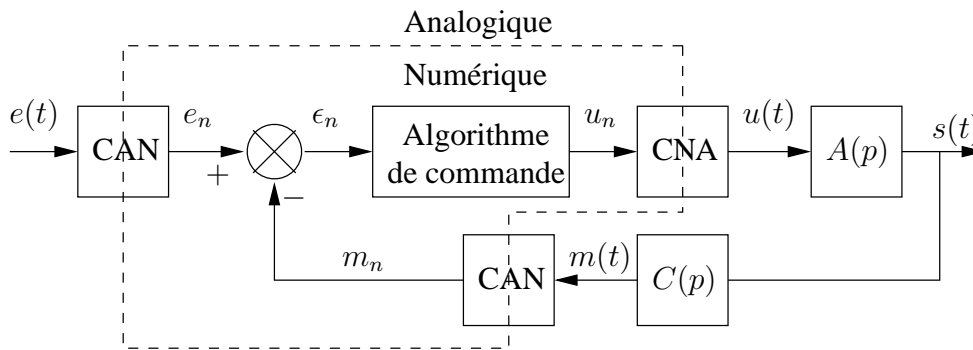


FIG. 1.2 – Autre structure typique réalisant un asservissement numérique.

Dans toute structure d'asservissement est inséré un calculateur numérique réalisant, entre autre, les tâches de l'algorithme de commande. Un tel calculateur peut être à base de microprocesseurs et faire partie d'un microcontrôleur, d'une carte électronique dite d'*acquisition et de traitement temps réel*, type DSP, réalisant également les opérations de conversion.

Chapitre 2

Modélisation des signaux échantillonnés

2.1 Définition

Soit $e(t)$ un signal temporel causal. Sauf mention particulière, tous les signaux considérés dans ces notes seront *causaux*, c'est-à-dire nuls pour les temps $t < 0$.

L'échantillonnage du signal $e(t)$ consiste à transformer celui-ci en une suite discrète $e(nT)$ de valeurs prises aux instants nT . Ici n est un entier naturel ($n = 0, 1, 2, \dots$) et T est la période d'échantillonnage. Les instants nT sont appelés *instants d'échantillonnage*. Les intervalles $[nT, (n+1)T]$ sont appelés *intervalles d'échantillonnage*.

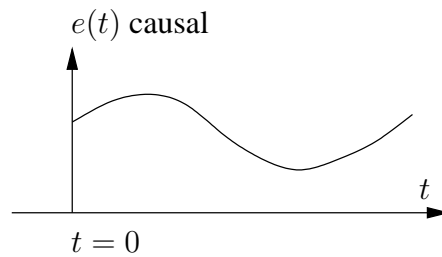


FIG. 2.1 – Signal causal.

L'opération décrite précédemment peut se formaliser comme suit. On définit d'abord $p(t)$, la *fonction d'échantillonnage* aux instants nT , donnée par :

$$p(t) := \sum_{n \geq 0} \delta(t - nT), \quad (2.1)$$

avec $\delta(t - t_0)$, la fonction de Dirac au temps t_0 (arbitraire).

Rappel : L'objet $\delta(t - t_0)$ est l'unique "fonction" telle que, pour tout signal $s(t)$ on ait :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = s(t_0).$$

La "fonction" $s(t) \delta(t - t_0)$, désignant le produit du signal $s(t)$ et $\delta(t - t_0)$, doit être comprise comme l'unique "fonction" telle que, pour tout signal $r(t)$ on ait

$$\int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau) s(\tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = r(t_0) s(t_0).$$

La fonction d'échantillonnage $p(t)$ est aussi appelée *peigne temporel*. Elle est représentée sur la figure 2.2.

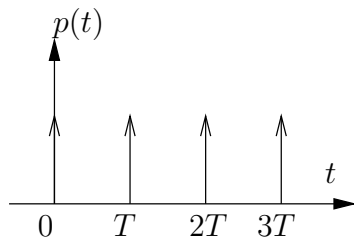


FIG. 2.2 – Peigne temporel causal.

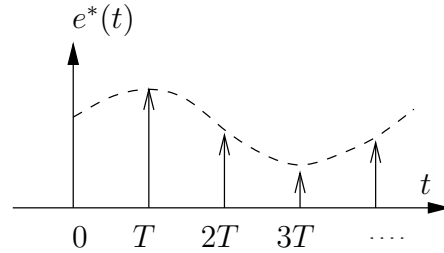


FIG. 2.3 – Signal peigné temporellement.

L'application de la fonction d'échantillonnage au signal $e(t)$ produit alors le signal échantillonné $e^*(t)$ (figure 2.3) défini comme suit :

■ **Définition**

Soit $e(t)$ un signal temporel causal et T la période d'échantillonnage. Le signal échantillonné $e^*(t)$ est égal à

$$e^*(t) := e(t)p(t) = e(t) \sum_{n \geq 0} \delta(t - nT). \quad (2.2)$$

On dit aussi que le signal $e(t)$ est peigné temporellement.

En utilisant les propriétés de la fonction de Dirac, on peut réexprimer $e^*(t)$ comme suit :

$$e^*(t) = e(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.3)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e(t) \delta(t - nT) \quad (2.4)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) \delta(t - nT). \quad (2.5)$$

On est conduit alors à la définition suivante :

■ **Définition**

Soit $e(t)$ un signal temporel causal, T la période d'échantillonnage et $e^*(t)$ le signal échantillonné associé. On appelle signal numérique associé à $e(t)$, la suite de nombres

$$\{e_0, e_1, e_2, \dots\},$$

avec $e_n := e(nT)$ pour $n \geq 0$.

Le signal numérique est aussi appelé suite des échantillons et e_n , échantillon à l'instant nT .

Remarque :

En automatique, le signal échantillonné $e^*(t)$ et le signal numérique e_n représentent

formellement le même objet associé au signal $e(t)$. Ils présentent toutefois une différence qu'il convient de rappeler. En effet, $e^*(t)$ est un signal à temps continu (mais nul presque partout), qui possède une énergie et qui peut donc être l'entrée d'un système. Par contre, le signal numérique e_n est une suite de nombres dont la progression se fait en temps discret, et "vivant" dans un calculateur numérique. Par la suite, il nous arrivera souvent de confondre le signal $e^*(t)$ et la suite numérique $e_n = e(nT)$, $n \in \mathbb{N}$. On représentera indifféremment un signal échantillonné $e^*(t)$ par :

$$\sum_{n \geq 0} e_n \delta(t - nT) \text{ ou } \{e_0, e_1, e_2, \dots\}.$$

2.2 Signaux usuels

(i) Impulsion unité : *L'impulsion unité échantillonnée*, $\delta^*(t)$, est définie par :

$$\delta^*(t) = \delta(t)p(t) \quad (2.6)$$

$$= \delta(t) \quad (2.7)$$

(La dernière égalité est en fait une **convention**.)

Le signal numérique associé est égal à $\{1, 0, 0, \dots\}$. On pose parfois $\delta^*(t - nT) := \delta_n$ avec n entier naturel.

(ii) Echelon unité : *L'échelon unité échantillonné*, $u^*(t)$ est définie par

$$u^*(t) = \sum_{n \geq 0} \delta(t - nT), \quad (2.8)$$

ou encore

$$u^*(t) = \sum_{n \geq 0} \delta_n. \quad (2.9)$$

Le signal numérique associé est égal à $\{1, 1, 1, \dots\}$. On rappelle que l'échelon unité u (ou encore fonction de Heaviside) est définie, en temps continu, par $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

2.3 Théorème de Shannon

Parmi les préoccupations essentielles de l'échantillonnage, on a celle qui consiste à ne pas perdre d'informations lors de la discrétisation temporelle du signal continu. Pour que cela soit possible, une des conditions à remplir est que le signal $e(t)$ que l'on doit échantillonner ait une **largeur spectrale** (exprimée en Hz ou rad/s) **finie**, on parle alors d'un *spectre de type passe-bas*. On rappelle que la largeur spectrale d'un tel signal est définie par l'intervalle $[0, f_{\max}]$ où f_{\max} est la plus grande fréquence présente dans le spectre fréquentiel de ce signal.

Cette condition découle du phénomène de recouvrement (ou repliement) de spectre, traitée dans un autre cours, dont nous rappelons le résultat fondamental suivant :

■ Théorème de Shannon

Pour préserver, lors de l'échantillonnage d'un signal $e(t)$, le contenu spectral de ce signal, la fréquence d'échantillonnage, $f_e := 1/T$, doit être supérieure au double de f_{\max} , la largeur spectrale du signal :

$$f_e > 2 f_{\max}. \quad (2.10)$$

Dans toute la suite, on supposera la condition (2.10) vérifiée.

■ Définition

La fréquence de Nyquist est définie par $f_N = \frac{f_e}{2}$.

La fréquence de Nyquist est d'une importance cruciale puisqu'elle définit la limite fréquentielle supérieure pour laquelle les représentations graphiques usuelles, dans le domaine fréquentiel, suffisent à représenter tout le contenu spectral d'un *système échantillonné* (voir chapitre 5). En effet, les outils graphiques, comme les diagrammes de Bode, de Black-Nichols ou de Nyquist, sont applicables aux systèmes échantillonnés et leurs tracés peuvent se limiter à la bande de fréquence $[0, f_N]$.

Conséquence pratique :

Dans la réalité, **tout signal analogique physiquement réalisable est de largeur spectrale "très grande"**, bien qu'il soit nécessairement d'énergie finie. Cela peut provenir, par exemple, de la présence de bruits ou de perturbations additives dont les spectres d'amplitude ne sont pas négligeables aux hautes-fréquences. Autrement dit, f_{\max} est très grand ce qui conduit nécessairement au choix d'un f_e encore plus grand. Par exemple, si on mesure directement le signal issu d'un capteur accélérométrique au repos à l'aide d'un oscilloscope à balayage, on s'aperçoit que l'ordre de grandeur de f_{\max} varie de 10^5 à 10^8 Hz !!!

PRÉCAUTION : Avant l'échantillonnage, il est nécessaire de filtrer le signal analogique brut par un filtre analogique de type passe-bas. Un tel filtre est appelé *Filtre Anti-Repliement (FAR)*.

Remarque :

Le choix de la fréquence d'échantillonnage d'un signal filtré dépend des caractéristiques du FAR utilisé, c'est-à-dire son ordre et sa fréquence de coupure. Le théorème de Shannon ne permet d'avoir qu'une borne **inférieure** sur la fréquence d'échantillonnage à ne pas dépasser. Mais pour bien éviter le phénomène de recouvrement de spectre, il est, en pratique, indispensable de choisir une fréquence d'échantillonnage **bien plus élevée**, fonction du niveau d'atténuation obtenu au delà de la fréquence f_{\max} grâce au FAR. Pour la mise en œuvre d'un asservissement numérique, le choix de la fréquence d'échantillonnage est un problème bien plus complexe. Il dépend de la fréquence de coupure f_c caractérisant **la bande passante** du système à asservir (FAR inclus) et des performances recherchées.

Chapitre 3

Transformée en z d'un signal échantillonné

3.1 Transformée en z

3.1.1 Définition de la transformée en z

Soit $e(t)$ un signal temporel causal que l'on échantillonne à la période d'échantillonnage T . Le signal échantillonné $e^*(t)$ que l'on obtient s'écrit :

$$e^*(t) = \sum_{n \geq 0} e_n \delta_n, \quad (3.1)$$

et le signal numérique associé est donné par :

$$\{e_0, e_1, e_2, \dots\}, \quad (3.2)$$

avec $e_n = e(nT)$.

Pour les signaux continus, la modélisation utilisée s'est fortement appuyée sur l'outil fondamental qu'est la transformée de Laplace. On cherche maintenant à calculer la transformée de Laplace de $e^*(t)$ et c'est cet objet qui constituera, après quelques transformations, la *transformée en z* du signal $e^*(t)$.

On note $e^*(p)$ la transformée de Laplace de $e^*(t)$ et on obtient donc :

$$e^*(p) := \sum_{n \geq 0} e_n \Delta_n^*, \quad (3.3)$$

avec Δ_n^* , la transformée de Laplace de $\delta(t - nT)$, l'impulsion unité à l'instant nT . Un simple calcul montre que :

$$\Delta_n^* = e^{-pnT} \quad (3.4)$$

Démonstration : Par définition, $\Delta_n^* = \int_0^{+\infty} \delta^*(t - nT) e^{-pt}$. Comme $\delta^*(t - nT) = \delta(t - nT)p(t)$, on a immédiatement le résultat. On a donc, pour tout signal échantillonné $e^*(t)$,

$$e^*(p) := \sum_{n \geq 0} e_n e^{-pnT}. \quad (3.5)$$

On pose alors

$$z := e^{pT} \quad (3.6)$$

■ Définition

La transformée en z du signal échantillonné de $e(t)$ est définie par :

$$E(z) := \sum_{n \geq 0} e_n z^{-n}. \quad (3.7)$$

Par abus de langage, on dira aussi " $E(z)$, transformée en z de $e(t)$ ".

La transformée en z est donc une opération qui associe, à un signal échantillonné (ou à un signal numérique), une série convergente en la variable z . Cette série est clairement une série entière en la variable $\frac{1}{z}$. On dit alors que cette série est une *série de Laurent* en z .

■ Notations

Dans ces notes de cours, selon le contexte et s'il n'y a pas d'ambiguïtés, nous utiliserons les notations suivantes pour désigner $E(z)$, la transformée en z du signal échantillonné de $e(t)$:

$$\mathcal{TZ}[e(t)], \quad \mathcal{TZ}[e(t)](z),$$

ou encore

$$\mathcal{TZ}[E(p)], \quad \mathcal{TZ}[E(p)](z),$$

où $E(p)$ désigne la transformée de Laplace de $e(t)$.

NB : Toutes les transformées en z considérées par la suite seront des fractions rationnelles en z .

Remarques :

- La définition de la transformée en z , objet d'étude central de l'asservissement numérique, montre que le signal échantillonné et le signal numérique ont un rôle identique.
- Il faut noter la présence du signe "–" dans la définition de la transformée en z . Ceci est dû au fait que la transformée en z est une adaptation de la transformée de Laplace pour le temps discret. Ceci est plus clair quand on met en parallèle l'équation (3.7) avec la formule suivante,

$$E(p) := \int_0^{+\infty} e(t) e^{-pt} dt,$$

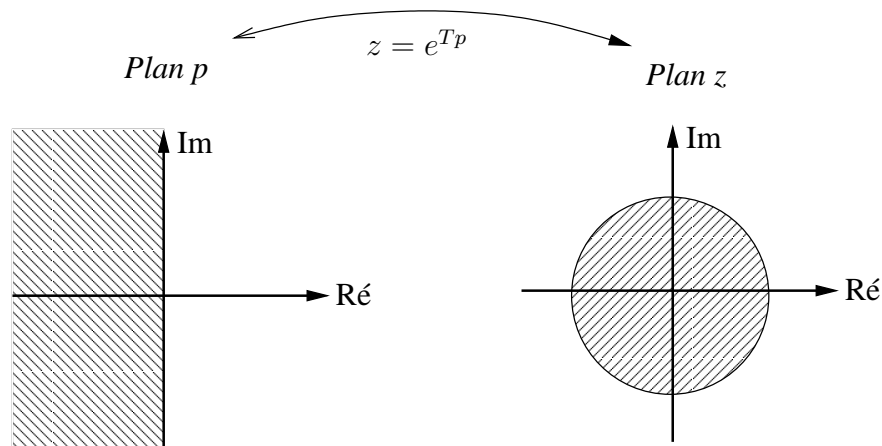
et en tenant compte de (3.6).

- La transformée en z n'existe que si la somme qui la définit converge. Pour tous les signaux qui nous intéressent, le domaine de convergence est de la forme $|z| > r$, avec $r > 0$ (dépendant du signal considéré). Ceci est une simple conséquence du fait que le domaine de convergence d'une série entière est un disque centré à l'origine, qui est transformé en son complément par l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Il convient d'ores et déjà de prendre en compte la propriété suivante relative à la transformation géométrique définie par (3.6).

■ Propriété géométrique

Si $z = e^{pT}$, avec p complexe, alors la partie réelle de p est strictement négative si et seulement si le module de z est strictement inférieur à un. Cela signifie géométriquement que $z = e^{pT}$ envoie le demi-plan $\{p : \operatorname{Re}(p) < 0\}$ à l'intérieur du cercle unité $\{z : |z| < 1\}$.



3.1.2 Propriétés de la transformée en z

■ Linéarité

Pour tous signaux temporels $e_1(t)$ et $e_2(t)$ et nombres réels a et b , on a

$$\mathcal{TZ}[a e_1(t) + b e_2(t)] = a \mathcal{TZ}[e_1(t)] + b \mathcal{TZ}[e_2(t)]. \quad (3.8)$$

■ Translation temporelle

Pour tous signal temporel $e(t)$, entier naturel n et nombre réel $T > 0$, on a

$$\mathcal{TZ}[e(t - nT)] = z^{-n} \mathcal{TZ}[e(t)] \quad (3.9)$$

■ Multiplication par le temps

Pour tout signal temporel $e(t)$ on a

$$\mathcal{TZ}[t e(t)] = -zT \frac{d}{dz} (\mathcal{TZ}[e(t)]) \quad (3.10)$$

■ Théorème de la valeur initiale

Soit $e(t)$ un signal temporel quelconque et $E(z)$ sa transformée en z . Alors, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} e(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} E(z). \quad (3.11)$$

■ Théorème de la valeur finale

Soit $e(t)$ un signal temporel quelconque et $E(z)$ sa transformée en z . Alors, si tous les pôles en z de $E(z)$ sont dans le cercle trigonométrique,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z). \quad (3.12)$$

3.2 Transformée en z inverse

■ Définition

Soit une fraction rationnelle $E(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ dont la série de Laurent est donnée par

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e_n z^{-n}. \quad (3.13)$$

La transformée en z inverse est l'application qui associe à $E(z)$ la suite des coefficients $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$.

Cette définition formalise le problème naturel qui consiste à retrouver l'expression des échantillons $e_n = e(nT)$ d'un signal échantillonné $e^*(t)$ à partir de $E(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Il faut cependant garder à l'esprit la remarque suivante.

PRÉCAUTION : La transformée en z inverse ne permet de reconstituer un signal continu qu'aux instants d'échantillonnage.

■ Méthode de calcul des échantillons à partir d'une transformée en z

Soit $E(z)$, la transformée en z d'un signal temporel $e(t)$, donnée par la fraction rationnelle en z suivante :

$$E(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}. \quad (3.14)$$

Pour retrouver l'expression des échantillons $e_n = e(nT)$ à partir de (3.14), on procède alors en trois étapes.

1. La première consiste à effectuer une décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{P(z)}{Q(z)}$ en la variable z .
2. La seconde consiste à transformer les éléments simples de variable z en éléments simples de variable z^{-1} .
3. La dernière étape consiste à (bien) appliquer le développement en série entière de la fraction élémentaire $\frac{1}{1-u}$.

Les étapes [1.] et [2.] peuvent être inversées. On transforme alors $E(z)$ en une fraction rationnelle en la variable z^{-1} et on effectue une décomposition en éléments simples. On peut aussi utiliser la méthode des résidus.

Chapitre 4

Bloqueurs & Convertisseurs

Dans un système asservi échantillonné, des signaux de nature différente doivent cohabiter de façon harmonieuse pour aboutir au bon fonctionnement de l'ensemble. Certains sont numériques et vivent dans un calculateur numérique. Ils ne sont intrinsèquement pas porteurs d'informations sur la réalité physique du système, comme par exemple son énergie. Les autres sont analogiques et sont liés au comportement dynamique du système. En effet, lorsqu'ils sont issus de capteurs de mesure, ces signaux reflètent son fonctionnement physique et lorsqu'ils alimentent les actionneurs du système, ils régissent son comportement. Deux problèmes se posent alors :

- L'un consiste à connecter la sortie du système avec l'entrée du calculateur.
- L'autre à connecter la sortie du calculateur numérique avec l'entrée du système.

Ces deux problèmes sont résolus par l'utilisation de CAN et de CNA de la façon présentée par la figure 1.1 à la section 1.2 du chapitre 1.

4.1 Bloqueurs

Le passage d'un signal numérique à un signal analogique est réalisé par un CNA. Cependant, le comportement d'un CNA n'a pas encore été formellement abordé. Une modélisation de ce dernier est présentée plus en détail dans la section 4.2. Schématiquement, le CNA transforme une suite de nombres $\{e_0, e_1, \dots\}$ en un signal à temps continu, c'est-à-dire défini pour tout $t \geq 0$.

Pour obtenir un tel signal, continu, on procède alors à un blocage du signal échantillonné grâce à un système appelé *bloqueur*. Le rôle du bloqueur est donc de créer un signal continu reliant deux échantillons successifs où le deuxième échantillon est encore inconnu. Ainsi, le bloqueur agit en extrapolant le (ou les) échantillon(s) précédant immédiatement l'échantillon inconnu.

Dans la pratique, ces extrapolations sont implémentées à partir de fonctions polynômiales. La qualité du bloqueur dépend de la qualité d'extrapolation, c'est-à-dire que cette dernière est d'autant meilleur que le degré du polynôme est élevé. Il existe autant de types de bloqueur que de degrés de polynômes d'extrapolation. Le bloqueur le plus couramment utilisé est celui dont le polynôme est d'ordre zéro. Sa modélisation est présentée ci-après.

4.1.1 Bloqueur d'ordre zéro

Durant un intervalle d'échantillonnage $[nT, (n+1)T]$, le bloqueur d'ordre zéro maintient le signal continu à une valeur constante, égale à la valeur de l'échantillon e_n . Le signal

ainsi obtenu est donc constant par morceaux.
On utilisera l'abréviation BOZ pour désigner un bloqueur d'ordre zéro.

On dit aussi que le *bloqueur d'ordre zéro* permet l'extrapolation linéaire de degré 0 entre nT et $(n + 1)T$ à partir de la valeur e_n .

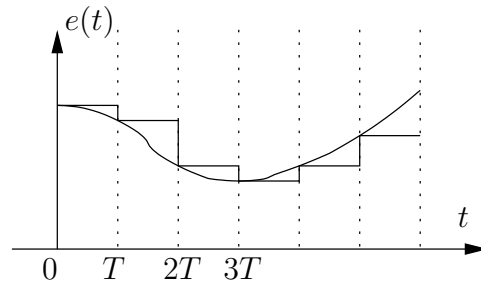


FIG. 4.1 – Comportement du bloqueur d'ordre zéro.

■ Propriété

La fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre zéro est donnée par :

$$B_0(p) := \frac{1 - e^{-pT}}{p}. \quad (4.1)$$

Démonstration de (4.1) : Un signal échantillonné est une somme infinie d'impulsions pondérées par les valeurs des échantillons. Par linéarité de la transformée de Laplace, il suffit donc de voir comment une impulsion unité est transformée par un BOZ.

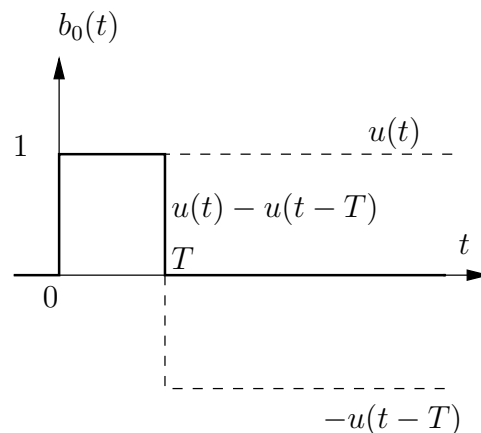


FIG. 4.2 – Construction d'un signal créneau

La réponse impulsionnelle d'un BOZ, $b_0(t)$ est donc un créneau qui s'écrit simplement

$$b_0(t) = u(t) - u(t - T),$$

avec u l'échelon unité. En appliquant la transformée de Laplace, on obtient (4.1).

4.1.2 Bloqueur d'ordre un

A titre d'information, on présente brièvement le bloqueur d'ordre un.

■ Définition

Le bloqueur d'ordre 1 permet l'extrapolation linéaire (de degré 1) entre nT et $(n+1)T$ à partir de e_n et de e_{n-1} .

■ Propriété

La fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre un :

$$B_1(p) = T(1 + Tp) \left[\frac{1 - e^{-pT}}{Tp} \right]^2 \quad (4.2)$$

Cette propriété se déduit de la fonction d'extrapolation :

$$s(nT + \tau) = e_n + \frac{\tau}{T}[e_n - e_{n-1}] \quad (4.3)$$

4.2 Modélisation des CAN et CNA

Dans le chapitre 1, deux blocs ont été présentés, le *Convertisseur Analogique Numérique* noté CAN, et le *Convertisseur Numérique Analogique* noté CNA. Ces deux blocs entourent le calculateur numérique. Ce sont ces objets qui réalisent, comme nous allons le voir, l'interface entre le monde du numérique avec celui de l'analogique. Avec les outils présentés dans ce chapitre, nous pouvons proposer une modélisation du comportement technologique réel des convertisseurs.

4.2.1 Cas du CAN

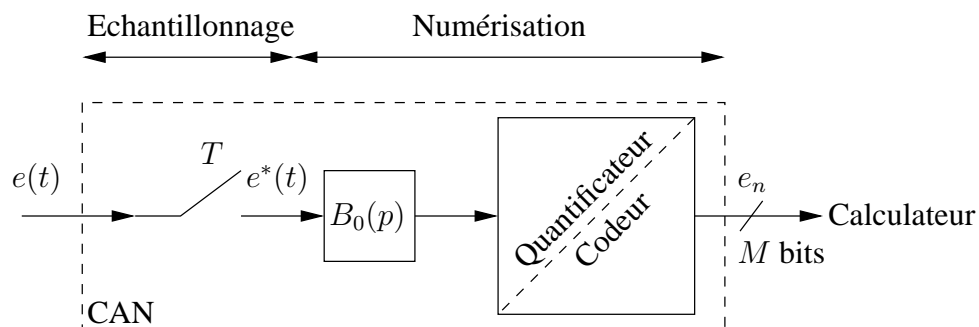


FIG. 4.3 – Modélisation du Convertisseur Analogique Numérique

Le fonctionnement du CAN peut être schématisé par la figure 4.3 et décomposé en deux étapes :

- 1. Echantillonnage** - L'échantillonneur crée un signal peigné. Il est schématisé par un interrupteur dont l'ouverture et la fermeture sont cadencées à la période d'échantillonnage par l'horloge du calculateur. En pratique, la fréquence d'horloge est bien

plus élevée que la fréquence d'échantillonnage, ceci afin de permettre au calculateur de délivrer le résultat des opérations nécessaires avant l'acquisition de l'échantillon suivant.

2. Numérisation - Le bloqueur d'ordre zéro maintient chaque échantillon de signal pendant la durée d'échantillonnage. Cela permet au *quantificateur* d'avoir le temps d'associer à l'échantillon une valeur dans un intervalle de nombres entiers $[0, 1, \dots, 2^M - 1]$ sous forme binaire, où M est nombre entier caractérisant le nombre de bits utilisés pour quantifier le signal analogique, définissant ainsi le nombre de niveaux disponibles pour quantifier le signal. Le nombre entier issu du quantificateur est alors associé par le *codeur* à un autre nombre binaire mais dont la valeur a un sens au regard des coefficients programmés dans le calculateur, c'est-à-dire tenant compte de son signe ou de la virgule flottante.

Insistons sur le fait qu'ici, le bloqueur fait partie de l'étape de numérisation et a pour rôle de permettre au quantificateur d'avoir le temps d'établir le signal quantifié binaire.

Dans la suite du cours d'asservissement numérique, il ne sera jamais tenu compte de l'étape de numérisation, considérant que le fonctionnement du CAN se résume à celui d'un simple échantillonneur délivrant indifféremment ou, selon le contexte, soit le signal échantillonné $e^*(t)$, soit le signal numérique e_n . C'est pourquoi il sera toujours représenté par le schéma de la figure 4.4.

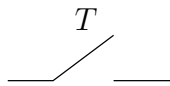


FIG. 4.4 – Représentation usuelle du CAN.

4.2.2 Cas du CNA

Le fonctionnement du CNA peut être schématisé par la figure 4.5 et décomposé de la façon suivante :

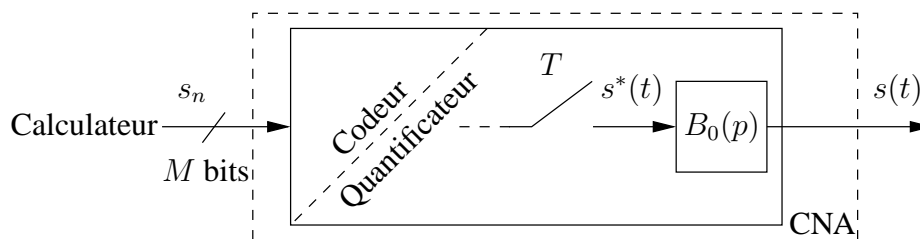


FIG. 4.5 – Modélisation du Convertisseur Numérique Analogique

Le calculateur fournit une valeur codée sous forme binaire mais tenant compte du signe ou de la virgule flottante du nombre traité. Le codeur transforme ce nombre en un autre nombre binaire "lisible" par le quantificateur qui le transforme à son tour en un signal analogique échantillonné de valeur adéquate. Ce signal est généralement maintenu constant durant toute la période d'échantillonnage. On retrouve ainsi un comportement de bloqueur d'ordre zéro précédé d'un échantillonneur. Par conséquent, un CNA sera systématiquement représenté par le schéma illustrée en figure 4.6.

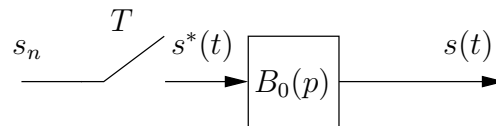


FIG. 4.6 – Représentation usuelle du CNA.

En pratique, selon la technologie utilisée, au cours d'une période d'échantillonnage le signal peut aussi évoluer de manière linéaire à l'aide d'un bloqueur d'ordre 1, parabolique à l'aide d'un bloqueur d'ordre 2, voire polynômiale. Ainsi, il faudra simplement considérer l'expression de la fonction de transfert adéquate d'un tel bloqueur en lieu et place du bloqueur d'ordre zéro sur la figure 4.6.

Par conséquent, la structure typique d'asservissement numérique de la figure 1.2 sera représentée par le schéma de la figure 4.7.

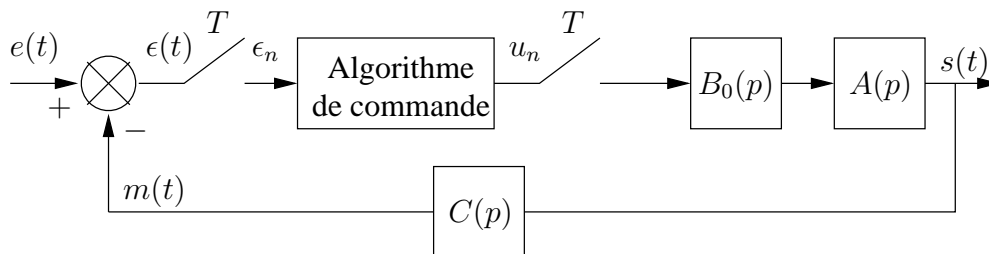


FIG. 4.7 – Structure typique d'asservissement numérique.

4.3 Classification des différents signaux

Dans cette section, nous présentons les différents types de signaux que l'on rencontre dans une chaîne d'asservissement numérique.

La figure 4.8 rassemble l'essentiel des signaux considérés.

Le signal représenté par la figure *C* correspond à la sortie typique d'un CNA avec bloqueur d'ordre zéro.

Le signal représenté par la figure *D* est le signal numérique tel qu'il est considéré en pratique, c'est-à-dire que le temps est échantillonné et l'amplitude est quantifiée.

Cependant, nous avons choisi, dans ce cours, de définir le signal représenté par la figure *B* comme étant le signal numérique car nous ne prenons jamais en compte l'étape de quantification en amplitude.

Le signal échantillonné $e^*(t)$ ne peut être représenté dans ce tableau, car il s'agit d'un signal à temps continu mais d'amplitude non quantifiée, introduit comme étape intermédiaire à la notion de signal numérique. On le représente alors par la figure 4.9.

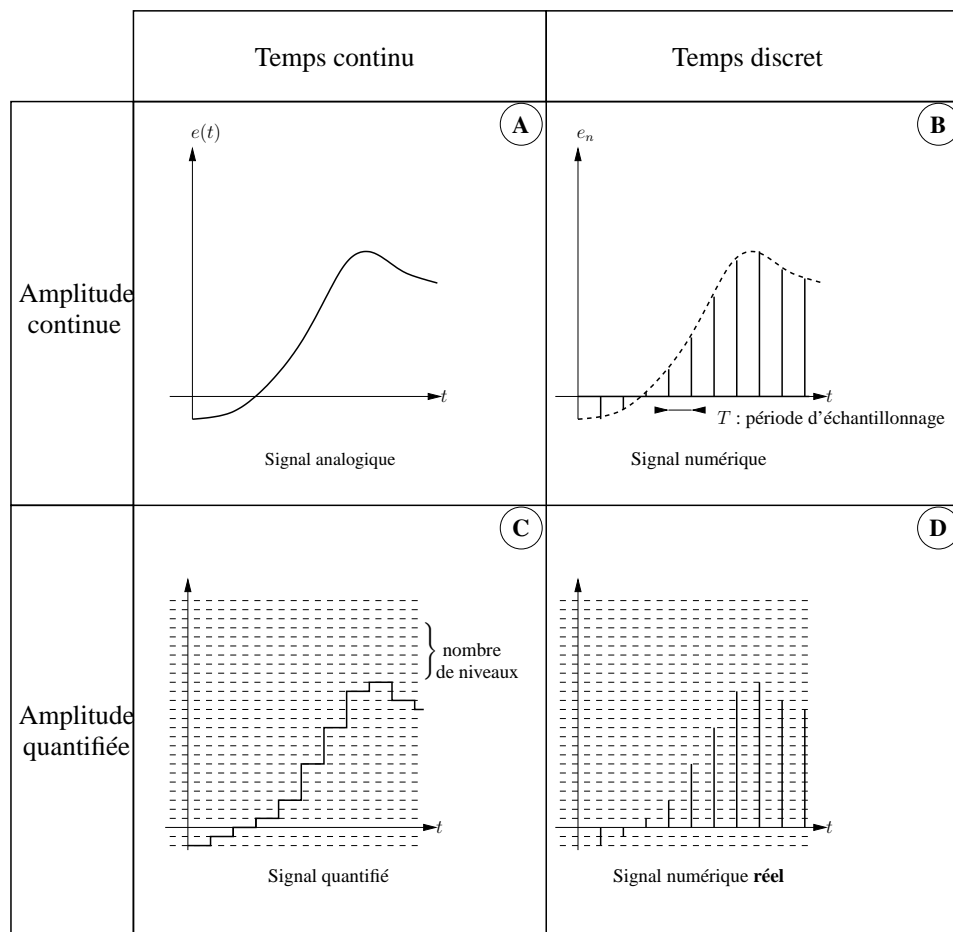


FIG. 4.8 – Classification des signaux.

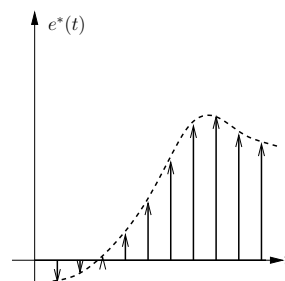


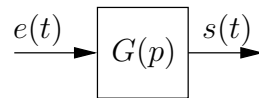
FIG. 4.9 – Signal peigné.

Chapitre 5

Fonction de transfert en z de systèmes échantillonnés

5.1 Filtre numérique linéaire

Soit $G(p)$ la fonction de transfert d'un système causal, linéaire, continu et stationnaire, de réponse impulsionnelle $g(t)$, liant un signal d'entrée $e(t)$ à un signal de sortie $s(t)$.



On a donc

$$s(t) = g(t) * e(t). \quad (5.1)$$

Ce système est maintenant échantillonné, c'est-à-dire que le signal d'entrée $e(t)$ est échantillonné à la période d'échantillonnage T pour devenir le signal échantillonné $e^*(t)$ avant d'exciter le système. A cause de l'échantillonnage, la relation (5.1) devient

$$s(t) = g(t) * e^*(t). \quad (5.2)$$

De plus, nous nous intéressons uniquement aux valeurs que prend la sortie $s(t)$ aux instants d'échantillonnage, c'est-à-dire que l'on considère le signal échantillonné $s^*(t) = s(nT)$ dont les valeurs sont celles de la suite numérique $s_n, n \in \mathbb{N}$. Pour modéliser cela, on introduit un *échantillonneur virtuel* sur la sortie $s(t)$, comme représenté sur la figure 5.1.

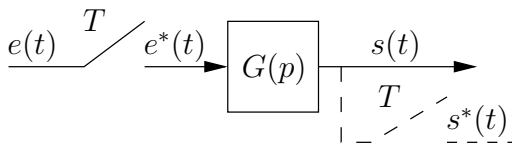


FIG. 5.1 – Échantillonneur virtuel sur la sortie.

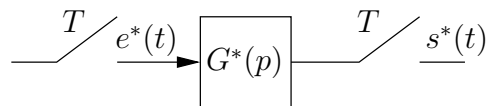


FIG. 5.2 – Système échantillonné.

Le système continu $G(p)$ entouré de ces deux échantillonneurs est appelé *système échantillonné* et on note $G^*(p)$ la fonction de transfert en p de sa réponse impulsionnelle échantillonnée notée $g^*(t)$. Sa représentation simplifiée est illustrée sur la figure 5.2

On a alors la propriété fondamentale suivante pour les systèmes échantillonnés :

■ Propriété

Considérons un signal continu $e(t)$, son signal échantillonné $e^*(t)$ et la sortie associée au système échantillonné aux instants d'échantillonnage $s^*(t)$. Alors,

$$s^*(t) = g^*(t) * e^*(t), \quad (5.3)$$

où $g^*(t)$ résulte de l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle $g(t)$.

Au niveau des échantillons, l'équation (5.3) est équivalente à

$$s_n = g_n * e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

D'après la définition du produit de convolution discret et en tenant compte de la causalité du filtre numérique g_n ainsi que celle du signal numérique e_n , on a :

$$s_n = \sum_{l=0}^n g_{n-l} e_l. \quad (5.5)$$

On appelle $g^*(t)$ la réponse impulsionnelle échantillonnée et g_n , $n \in \mathbb{N}$, le filtre numérique.

La relation (5.5) signifie que l'échantillon de sortie s_n est calculé à partir des $n + 1$ échantillons d'entrée $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$.

Démonstration :

Rappelons que

$$s^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n \delta_n, \quad (5.6)$$

avec $s_n = s(nT)$ et $\delta_n = \delta(t - nT)$.

D'après (5.2) et par causalité des signaux concernés, on a

$$s(t) = \int_0^{+\infty} g(t - \xi) e^*(\xi) d\xi \quad (5.7)$$

$$= \int_0^{+\infty} g(t - \xi) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} e_l \delta(\xi - lT) \right) d\xi \quad (5.8)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} e_l \int_0^{+\infty} g(t - \xi) \delta(\xi - lT) d\xi \quad (5.9)$$

$$= \sum_{0 \leq lT \leq t} e_l g(t - lT). \quad (5.10)$$

En prenant $t = nT$, $n \in \mathbb{N}$, on en déduit (5.5).

Calculons maintenant $g^*(t) * e^*(t)$. Il vient

$$g^*(t) * e^*(t) = \int_0^{+\infty} g^*(t - \xi) e^*(\xi) d\xi \quad (5.11)$$

$$= \int_0^{+\infty} g^*(t - \xi) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} e_l \delta(\xi - lT) \right) d\xi \quad (5.12)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e_k \int_0^{+\infty} g^*(t - \xi) \delta(\xi - kT) d\xi \quad (5.13)$$

$$= \sum_{0 \leq kT \leq t} e_k g^*(t - kT) \quad (5.14)$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq n} e_k g_{n-k} \delta_n \quad (5.15)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} e_k g_{n-k} \right) \delta_n. \quad (5.16)$$

En utilisant (5.5) et (5.6), on en déduit (5.3).

Remarque :

Il est à remarquer que dans ce chapitre, on identifie à volonté signal échantillonné et signal numérique.

L'équation (5.5) permet d'établir une relation entre $S(z)$, la transformée en z du signal échantillonné $s^*(t)$ et $E(z)$, la transformée en z du signal échantillonné $e^*(t)$.

■ Propriété :

Soit $G(z)$, la transformée en z associée à $g^*(t)$, c'est-à-dire

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^{-n}. \quad (5.17)$$

Alors, on a

$$S(z) = G(z) E(z). \quad (5.18)$$

Démonstration :

Soit :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^{-n}. \quad (5.19)$$

Alors, en utilisant (5.5) dans (5.19), on a

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e_k g_{n-k} z^{-n} \quad (5.20)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} g_{n-k} z^{-(n-k)} \quad (5.21)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} g_{n-k} z^{-(n-k)}. \quad (5.22)$$

En posant $l = n - k$, il vient :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} \sum_{l=-k}^{\infty} g_l z^{-l} \quad (5.23)$$

et, de par la causalité de $g(t)$ (c'est-à-dire $g(t) = 0$ pour $t < 0$, soit $n < k$),

$$S(z) = \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} g_l z^{-l}}_{G(z)} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k}}_{E(z)}. \quad (5.24)$$

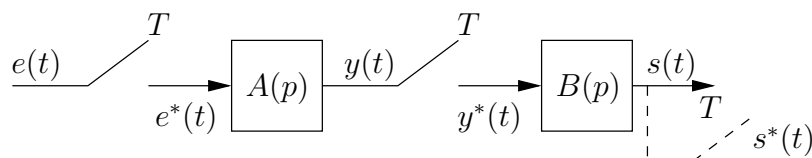
Analogie continu/discret pour la réponse d'un système :

	FONCTION DE TRANSFERT	RÉPONSE TEMPORELLE
DISCRET	$S(z) = G(z) E(z)$	$s_n = \sum_{k=0}^n g_{n-k} e_k$
CONTINU	$S(p) = G(p) E(p)$	$s(t) = \int_{\tau=0}^t g(t - \tau) e(\tau) d\tau$

5.2 Systèmes en série

Dans cette section, lorsque plusieurs échantillonneurs sont utilisés dans un système, il faut noter qu'ils fonctionnent de façon **synchronisée**. Cela signifie que la **période** et les **instants d'échantillonnage** sont **identiques** pour tous les échantillonneurs.

1^{er} cas : Fonction de transfert en z de deux systèmes échantillonnés en série.



En appliquant le résultat de la section précédente (5.1) successivement au système $B(p)$ puis $A(p)$, il vient :

$$S(z) = B(z) Y(z) \quad (5.25)$$

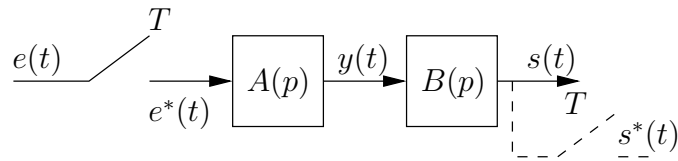
$$Y(z) = A(z) E(z) \quad (5.26)$$

De (5.25) et (5.26), on en déduit :

$$S(z) = B(z) A(z) E(z) \quad (5.27)$$

*Si deux systèmes continus, de fonctions de transfert $A(p)$ et $B(p)$, sont **mis en série** et où chaque système est **entouré par des échantillonneurs**, la fonction de transfert en z de l'ensemble est égale au produit des fonctions de transfert en z de chaque système échantillonné.*

2^e cas : Fonction de transfert en z d'un système constitué de deux systèmes continus en série.



Il faut d'abord calculer le produit des fonctions de transfert en p :

$$G(p) = B(p) A(p) \quad (5.28)$$

puis calculer la transformée en z de ce produit :

$$G(z) = \mathcal{TZ}[G(p)](z) \quad (5.29)$$

la transformée en z de la sortie $s(nT)$ s'exprime alors par :

$$S(z) = G(z) E(z) \quad (5.30)$$

■ **Notations :**

Par souci de clarté et s'il n'y a pas d'ambiguïtés, nous utiliserons par la suite les notations simplificatrices suivantes :

$$\mathcal{TZ}[G] \text{ au lieu de } \mathcal{TZ}[G(p)] \quad (5.31)$$

$$\mathcal{TZ}[B A] \text{ au lieu de } \mathcal{TZ}[B(p) A(p)] \quad (5.32)$$

$$\overline{B A}(z) \text{ au lieu de } \mathcal{TZ}[B A](z) \quad (5.33)$$

Ainsi, le membre de gauche de l'équation (5.33) signifie que l'on parle de la fonction de transfert en z de deux systèmes continus, de fonction de transfert $A(p)$ et $B(p)$, mis en série et **NON** séparés d'un échantillonneur.

Les équations (5.31) et (5.32) signifient que l'on omettra la variable de Laplace p dans l'argument de l'opérateur $\mathcal{TZ}[\dots]$ de transformée en z .

L'équation (5.30) s'écrit donc :

$$S(z) = \overline{B A}(z) E(z) \quad (5.34)$$

PRÉCAUTION : Si $A(p)$ et $B(p)$ sont les fonctions de transfert de deux systèmes continus mis en série et **NON** séparés d'un échantillonneur, la fonction de transfert en z de l'ensemble est égale à la transformée en z du produit $A(p) B(p)$ **NON séparé!**

En résumé, il faut retenir qu'en règle générale :

$$\mathcal{TZ}[B A] \neq \mathcal{TZ}[B] \mathcal{TZ}[A]$$

Remarques :

- Il est important de noter l'emplacement des échantillonneurs dans la chaîne du système avant de déterminer la fonction de transfert en z équivalente.
- Les seules fonctions de transfert $A(p)$ telles que pour tout $B(p)$:

$$\mathcal{TZ}[B A] = \mathcal{TZ}[B] \mathcal{TZ}[A]$$

sont les fonctions constantes et les retards purs.

5.3 Asservissement échantillonné

Considérons la structure d'asservissement suivante :

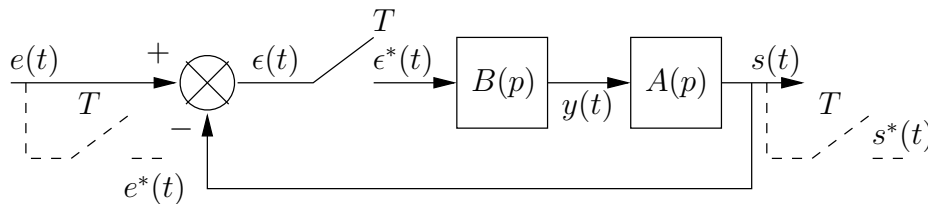


FIG. 5.3 – Structure d'un asservissement échantillonné.

Dans le schéma, figure 5.3, les convertisseurs CAN et CNA n'apparaissent pas. On considère que l'échantillonneur, placé en amont du système analogique de fonction de transfert $B(p)$, ne délivre pas de signal numérique mais il échantillonne le signal $\epsilon(t)$. C'est donc le signal $\epsilon^*(t)$ qui excite le système $B(p)$.

Le calcul de la fonction de transfert en boucle fermée $\frac{S(z)}{E(z)}$ est détaillé ci-dessous.

Exprimons d'abord l'écart $\epsilon(t)$ en fonction des signaux $e(t)$ et $s(t)$:

$$\epsilon(t) = e(t) - s(t), \quad (5.35)$$

ce qui donne, lorsque ces signaux sont considérés aux instants d'échantillonnage,

$$\epsilon^*(t) = \epsilon^*(t) - s^*(t), \quad (5.36)$$

et devient, par application de la transformée en z ,

$$\mathcal{E}(z) = E(z) - S(z). \quad (5.37)$$

La sortie $S(z)$ se déduit de la façon suivante (voir la section 5.2) :

$$S(z) = \overline{AB}(z) \mathcal{E}(z), \quad (5.38)$$

où $\mathcal{E}(z)$ désigne la transformée en z de $\epsilon^*(t)$. Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons les fonctions de transferts en z suivantes :

$$\frac{\mathcal{E}(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + \overline{AB}(z)} \quad (5.39)$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\overline{AB}(z)}{1 + \overline{AB}(z)} \quad (5.40)$$

La relation (5.39) caractérise l'évolution du signal d'écart échantillonné $e^*(t)$ en fonction du signal de référence (ou consigne) aux instants d'échantillonnage $e^*(t)$. Elle permettra d'étudier la précision du système échantillonné. La relation (5.40) caractérise quant à elle l'évolution du signal de sortie aux instants d'échantillonnage $s^*(t)$ en fonction du signal de référence aux instants d'échantillonnage $e^*(t)$. Elle permettra, entre autre, d'étudier les performances du système asservi échantillonné.

Remarques :

- Les équations (5.39) (resp. (5.40)) permettent d'établir des relations de récurrences reliant les échantillons e_n et ϵ_n (resp. e_n et s_n). Par exemple, en posant

$$\overline{AB}(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_K z^{-K}}{\beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_L z^{-L}}, \quad K \leq L \quad (5.41)$$

l'équation (5.39) conduit à :

$$\left(1 + \overline{AB}(z)\right) S(z) = \overline{AB}(z) E(z) \quad (5.42)$$

$$\left(1 + \overline{AB}(z)\right) \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^{-k} = \overline{AB}(z) \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^{-k} \quad (5.43)$$

En développant cette série et en identifiant les coefficients des termes z^{-n} , on obtient la relation de récurrence :

$$s_n = \frac{1}{\alpha_0 + \beta_0} \left(-(\alpha_1 + \beta_1)s_{n-1} - \dots - (\alpha_L + \beta_L)s_{n-L} + \alpha_0 e_n + \dots + \alpha_K e_{n-K} \right) \quad (5.44)$$

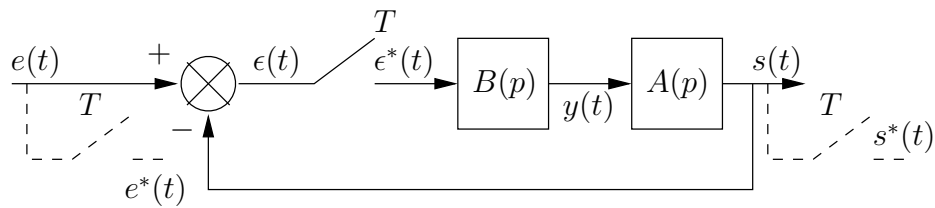
- Dans le cas où le système $B(p)$ est un **B.O.Z.** (bloqueur d'ordre zéro) :

$$B(p) = B_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad (5.45)$$

alors nous avons le résultat suivant :

$$\overline{AB}(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{TZ} \left[\frac{A(p)}{p} \right] (z) \quad (5.46)$$

5.4 Exemple illustratif



On considère, le système de la figure précédente avec :

$$A(p) = \frac{A_0}{p + a} \quad (5.47)$$

et

$$B(p) = B_0(p) \quad (5.48)$$

$$= \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad (5.49)$$

où A_0 et a sont des scalaires réels. Montrer que la fonction de transfert en $F(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$ a pour expression :

$$F(z) = \frac{\overline{AB}(z)}{1 + \overline{AB}(z)} \quad (5.50)$$

$$= \frac{A_0}{a} \frac{1 - e^{-aT}}{(z - e^{-aT}) + \frac{A_0}{a} (1 - e^{-aT})} \quad (5.51)$$

5.5 Asservissement à retour non unitaire

Jusqu'à présent, la boucle de rétroaction était constituée uniquement d'un retour unitaire. Le cas d'un retour non unitaire est maintenant considéré. On distinguera la structure à un seul échantillonneur dans la chaîne directe de celle avec un échantillonneur supplémentaire dans la boucle de retour.

Ici, les échantillonneurs virtuels permettent de considérer les signaux non-échantillonnés aux instants d'échantillonnage.

5.5.1 Système à un seul échantillonneur

La structure étudiée est la suivante :

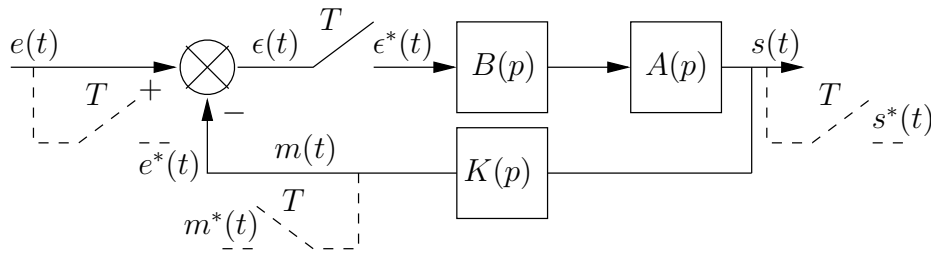


FIG. 5.4 – Structure avec un échantillonneur dans la chaîne directe.

La sortie $S(p)$ s'exprime en fonction de l'erreur $\mathcal{E}^*(p)$ par :

$$S(p) = A(p) B(p) \mathcal{E}^*(p), \quad (5.52)$$

ce qui, par application de la transformée en z de chaque côté de l'égalité (5.52), devient :

$$S(z) = \overline{AB}(z) \mathcal{E}(z). \quad (5.53)$$

Posons

$$M(p) = K(p) S(p). \quad (5.54)$$

On a

$$M(p) = K(p) A(p) B(p) \mathcal{E}^*(p), \quad (5.55)$$

où l'on pose

$$G(p) = K(p) A(p) B(p). \quad (5.56)$$

En introduisant un échantillonneur virtuel sur le signal $m(t)$, on a

$$M^*(p) = G^*(p) \mathcal{E}^*(p), \quad (5.57)$$

où $G^*(p)$ est la fonction de transfert en p de la réponse impulsionnelle échantillonnée de $G(p)$. Par ailleurs, l'erreur $\mathcal{E}(p)$ s'écrit :

$$\mathcal{E}(p) = E(p) - M(p) \quad (5.58)$$

ce qui, en tenant compte de l'échantillonnage (réel ou virtuel) des signaux concernés, devient

$$\mathcal{E}^*(p) = E^*(p) - M^*(p) \quad (5.59)$$

$$= E^*(p) - G^*(p) \mathcal{E}^*(p), \quad (5.60)$$

et par application de la transformée en z à (5.60), il vient :

$$\mathcal{E}(z) = E(z) - G(z) \mathcal{E}(z), \quad (5.61)$$

où $G(z) = \mathcal{TZ}[G^*(p)](z) = \mathcal{TZ}[K A B](z) = \overline{K A B}(z)$. Ainsi

$$\mathcal{E}(z) = E(z) - \overline{K A B}(z) \mathcal{E}(z), \quad (5.62)$$

d'où

$$\frac{\mathcal{E}(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + \overline{K A B}(z)}. \quad (5.63)$$

En combinant (5.53) et (5.63), on obtient

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\overline{A B}(z)}{1 + \overline{K A B}(z)}. \quad (5.64)$$

5.5.2 Système à deux échantillonneurs

On considère la structure d'asservissement échantillonné (figure 5.5) comportant un échantillonneur supplémentaire dans la boucle de retour.

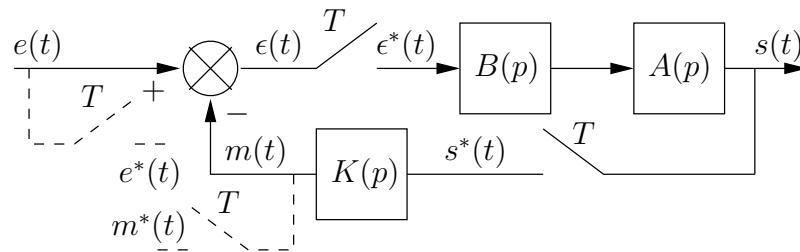


FIG. 5.5 – Échantillonneurs dans la chaîne directe et dans la boucle de retour.

On pose

$$G(p) = A(p) B(p). \quad (5.65)$$

On a

$$S^*(p) = G^*(p) \mathcal{E}^*(p) \quad (5.66)$$

ce qui, par application de la transformée en z , devient

$$S(z) = G(z) \mathcal{E}(z) \quad (5.67)$$

$$= \overline{AB}(z) \mathcal{E}(z) \quad (5.68)$$

Comme précédemment, on pose

$$M(p) = K(p) S^*(p), \quad (5.69)$$

ce qui, en introduisant un échantillonneur virtuel sur le signal $m(t)$, devient

$$M^*(p) = K^*(p) S^*(p). \quad (5.70)$$

Le signal d'écart échantillonné $\mathcal{E}^*(p)$ s'exprime donc par

$$\mathcal{E}^*(p) = E^*(p) - M^*(p) \quad (5.71)$$

$$= E^*(p) - K^*(p) S^*(p) \quad (5.72)$$

$$= E^*(p) - K^*(p) G^*(p) \mathcal{E}^*(p). \quad (5.73)$$

En appliquant la transformée en z à (5.73), il vient

$$\mathcal{E}(z) = E(z) - K(z) G(z) \mathcal{E}(z) \quad (5.74)$$

$$= E(z) - K(z) \overline{AB}(z) \mathcal{E}(z), \quad (5.75)$$

d'où

$$\frac{\mathcal{E}(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + K(z) \overline{AB}(z)}. \quad (5.76)$$

En combinant (5.75) et (5.68), on obtient

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\overline{AB}(z)}{1 + K(z) \overline{AB}(z)}. \quad (5.77)$$

Remarques :

- Suivant la présence ou non d'un échantillonneur dans la boucle de retour, la position des crochets dans le dénominateur des fonctions de transfert (5.76) (respectivement (5.77)) et (5.63) (respectivement (5.64)) n'est pas la même.
- Les fonctions de transfert ((5.63), (5.64), (5.76) et (5.77)) ne permettent de remonter aux informations temporelles des signaux $\epsilon(t)$ et $s(t)$ qu'aux instants d'échantillonnage, c'est-à-dire aux signaux échantillonnés $\epsilon^*(t)$ et $s^*(t)$ en réponse au signal $e^*(t)$.
- Dans le cas où le retour est unitaire, $K(p) = 1$, les fonctions de transfert (5.76), (5.77), (5.63) et (5.64) sont alors toutes identiques et correspondent à celles vues à la section 5.3, en (5.39) et (5.40).

Chapitre 6

Etude de la stabilité

La conception d'un système asservi doit garantir avant tout la stabilité en boucle fermée. Ce chapitre est consacré à la présentation d'outils permettant l'étude de la stabilité des systèmes asservis.

6.1 Condition générale de stabilité

■ Définition

Un signal échantillonné $\sum_{n=0}^{+\infty} e_n \delta_n$ est borné si les échantillons e_n sont majorés, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |e_n| \leq M.$$

■ Définition

Un système est dit stable au sens entrée bornée-sortie bornée (EBSB) lorsqu'à toute entrée bornée correspond une sortie bornée.

■ Propriété

Un système échantillonné, de fonction de transfert $G(z)$, est stable si et seulement si

$$\text{Les pôles de } G(z) \text{ sont de modules strictement inférieurs à 1.} \quad (6.1)$$

Démonstration : On ne montrera que le caractère suffisant de la condition (6.1), c'est-à-dire que si les pôles de $G(z)$ de module strictement inférieur à 1, alors le système échantillonné est stable.

Supposons que tous les pôles de $G(z)$ soient de module strictement inférieurs à 1. Notons $l := \max |\lambda_i| < 1$ avec λ_i les pôles de $G(z)$. En considérant la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $G(z)$, il est aisé de voir que l'on peut obtenir un développement en série de Laurent pour $|z| > l$. Cela signifie que le cercle unité est strictement dans le domaine de convergence de la série de Laurent et donc, $G(1)$ est absolument sommable. On pose alors

$$K = \sum_0^{+\infty} |g_n|.$$

Rappelons que la sortie d'un système numérique est le produit de convolution du signal numérique d'entrée par la réponse impulsionnelle numérique du système (voir (5.5)). On a alors clairement l'implication

suivante :

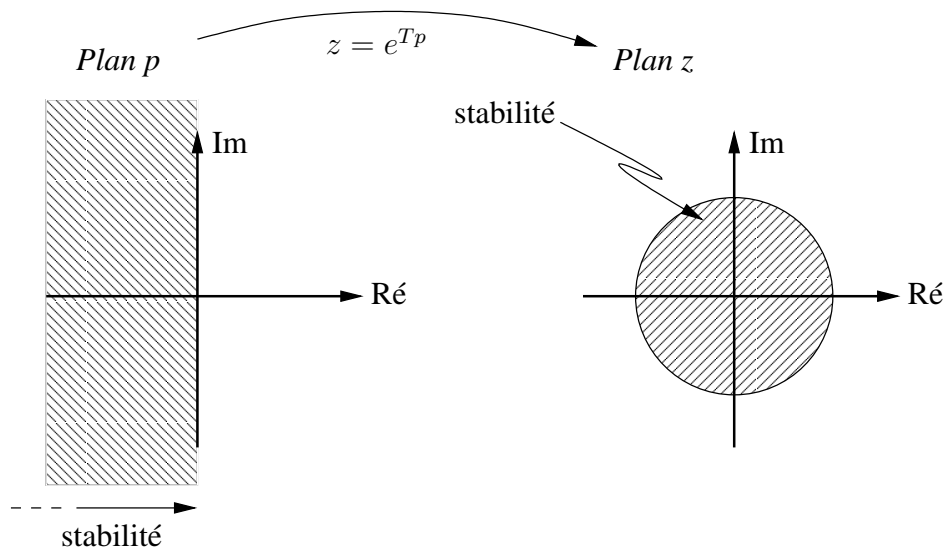
$$\text{Si } |e_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ alors } |s_n| \leq M K \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

c'est-à-dire EBSB.

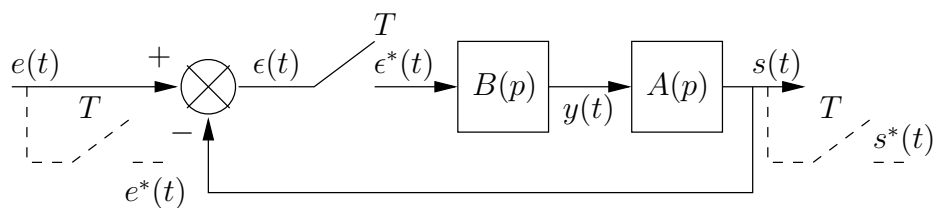
Une preuve du caractère nécessaire de (6.1) dépasse le cadre de ces notes.

Remarque :

- Cette règle est générale puisqu'elle s'applique aussi bien si $G(z)$ représente un système en boucle ouverte ou un système asservi (c'est-à-dire un système en boucle fermée).
- La correspondance entre *stabilité en temps continu* et *stabilité en temps discret* est illustré par la figure ci dessous



Les critères présentés ci-après permettent de juger de la stabilité d'un système asservi échantillonné à partir de la connaissance de sa fonction de transfert en boucle ouverte. Considérons à nouveau la structure d'asservissement échantillonnée représenté par le schéma suivant :



6.2 Critères algébriques

Le point de départ de ces critères est l'équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée du système échantillonné :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\overline{AB}(z)}{1 + \overline{AB}(z)} = \frac{\gamma_n z^n + \dots + \gamma_0}{c_n z^n + \dots + c_0} \quad (6.2)$$

■ **Définition :**

L'équation caractéristique de la fonction de transfert de (équation (6.2)) est obtenue en annulant le dénominateur de la fonction de transfert :

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0 \quad (6.3)$$

6.2.1 Critère matriciel de Schur-Cohn

Ce critère est utilisable quel que soit l'ordre du système. Il permet de savoir si toutes les racines de l'équation caractéristique sont de modules inférieur à 1, auquel cas, le système est réputé stable en boucle fermée.

■ **Définition**

La matrice de Schur-Cohn s'écrit, en fonction des coefficients du polynôme de l'équation caractéristique :

$$SC_k = \left[\begin{array}{cccc|cccc} c_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & c_{n-1} & \dots & \dots & c_{n-k+1} \\ c_1 & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ c_{k-1} & \dots & \dots & c_1 & c_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & c_n \\ \hline c_n & 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_{k-1} \\ c_{n-1} & \ddots & \ddots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_{n-k+1} & \dots & \dots & c_{n-1} & c_n & 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \end{array} \right] \quad (6.4)$$

L'analyse de la stabilité passe par le calcul du déterminant de la matrice de Schur-Cohn. Notons :

$$\Delta_k = \det(SC_k) \quad (6.5)$$

Le critère de stabilité de Schur-Cohn s'énonce ainsi :

■ **Propriété :**

Le système échantillonné sera stable en boucle fermée si pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} \Delta_k &< 0 && \text{pour } k \text{ impair} \\ \Delta_k &> 0 && \text{pour } k \text{ pair} \end{aligned}$$

Exemple : système d'ordre $n = 2$

L'équation caractéristique d'un tel système s'écrit :

$$c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0$$

Calculer Δ_k pour $k = 1$ puis $k = 2$:

$$\Delta_1 =$$

$$\Delta_2 =$$

Quelles sont les conditions que doivent vérifier les coefficients du polynôme de l'équation caractéristique pour que le système soit stable en boucle fermée ?

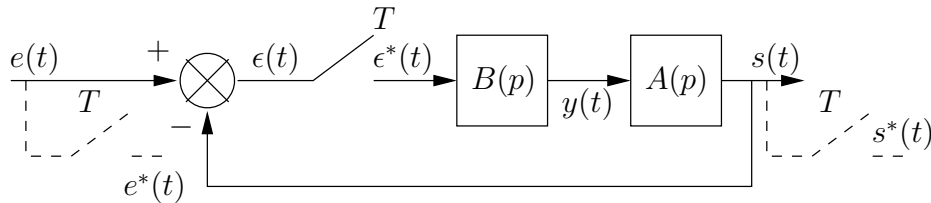
Exemple : système d'ordre $n = 1$

Dans un tel cas, vérifier le critère de Schur-Cohn revient à résoudre directement l'équation caractéristique :

$$c_1 z + c_0 = 0$$

donnant ainsi l'expression du pôle du système en boucle fermée. Ce pôle sera stable si son module est inférieur à 1.

Application au système vu au chapitre 5 :



$$A(p) = \frac{A_0}{p + a} \quad (6.6)$$

et

$$B(p) = B_0(p) \quad (6.7)$$

$$= \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad (6.8)$$

On rappelle que $F(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$ a pour expression :

$$F(z) = \frac{\overline{AB}(z)}{1 + \overline{AB}(z)} \quad (6.9)$$

et que :

$$\overline{AB}(z) = \frac{A_0}{a} \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}} \quad (6.10)$$

- Quel est l'ordre du système bouclé ?
- Quelle est son équation caractéristique ?
- En supposant que A_0 est le seul paramètre de réglage, déterminer les conditions de stabilité en boucle fermée.

6.2.2 Critère de Jury : *présenté pour le cas $n=2$*

Reprenons l'équation caractéristique (6.2) pour le cas où $n = 2$.

$$c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0 \quad (6.11)$$

L'équation (6.11) est normalisée par rapport au coefficient du plus haut degré, c'est-à-dire que l'on divise le membre de gauche par c_2 :

$$z^2 + \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0 z = 0 \quad (6.12)$$

où :

$$\tilde{c}_1 = \frac{c_1}{c_2} \quad (6.13)$$

$$\tilde{c}_0 = \frac{c_0}{c_2} \quad (6.14)$$

■ **Définition**

La polynôme de Jury s'écrit :

$$J(z) = z^2 + \tilde{c}_1 z + \tilde{c}_0 \quad (6.15)$$

Le critère de jury pour un système d'ordre 2 s'énonce ainsi :

■ **Propriété :**

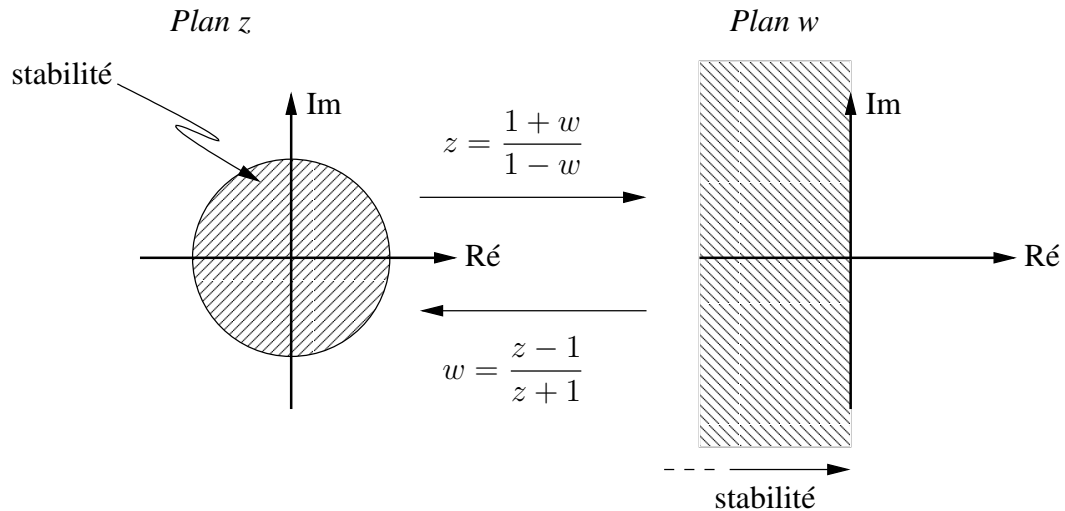
Le système d'ordre 2 est stable si et seulement si la polynôme de Jury (équation (6.15)) vérifie les trois conditions :

- $J(0) < 1 \Rightarrow \tilde{c}_0 < 1$
- $J(1) > 0 \Rightarrow 1 + \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0 > 0$
- $J(-1) > 0 \Rightarrow 1 - \tilde{c}_1 + \tilde{c}_0 > 0$

6.2.3 Critère de Routh-Hurwitz

Transformation w :

Afin de pouvoir appliquer, pour les systèmes échantillonnés, les mêmes outils d'analyse de stabilité que pour les systèmes continus, on cherche une transformation *conforme* qui, à tout nombre complexe à l'intérieur du cercle unité, fasse correspondre un nombre complexe et un seul dans le demi-plan gauche du plan complexe.



Pour le passage du plan z au plan w , cette transformation se définit en posant :

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (6.16)$$

et pour le passage inverse (du plan w au plan z) :

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad (6.17)$$

$$(6.18)$$

L'intérêt principal de cette transformation est qu'elle conserve la structure de fractions rationnelles des fonctions de transfert. En effet, en reprenant l'équation caractéristique énoncée précédemment (équation (6.3)) et en utilisant (6.16), il vient :

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 = 0 \quad (6.19)$$

$$c_n \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^n + c_{n-1} \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^{n-1} + \dots + c_1 \left(\frac{1+w}{1-w} \right) + c_0 = 0 \quad (6.20)$$

ce qui donne, après développement, l'équation caractéristique en w :

$$\alpha_n w^n + \alpha_{n-1} w^{n-1} + \dots + \alpha_1 w + \alpha_0 = 0 \quad (6.21)$$

où les coefficients réels α_k , $k = [0, 1, \dots, n]$ dépendent des coefficients c_k de l'équation caractéristique en z .

Il est alors possible d'appliquer le critère algébrique de Routh, bien connu pour les systèmes continus.

Critère de Routh-Hurwitz :

Il consiste, dans un premier temps, à former le tableau suivant à partir des coefficients de l'équation caractéristique en w (6.21) :

Donné par l'éq. car.	w^n	α_n	α_{n-2}	α_{n-4}	α_{n-6}	\dots
	w^{n-1}	α_{n-1}	α_{n-3}	α_{n-5}	\dots	
A remplir	w^{n-2}	x_{n-2}	x_{n-3}	x_{n-4}	\dots	\dots
	w^{n-3}	y_{n-3}	\vdots	\vdots		
	\vdots	\vdots	\vdots			
	\vdots	\vdots				
	w^0	$\underbrace{\hspace{10em}}$ valeurs de même signe				

avec :

$$x_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2} - \alpha_n \alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$$

$$x_{n-3} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-4} - \alpha_n \alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$$

$$x_{n-4} = \frac{\alpha_{n-1} \alpha_{n-6} - \alpha_n \alpha_{n-7}}{\alpha_{n-1}}$$

$$x_{n-5} = \dots$$

et à la ligne suivante :

$$y_{n-3} = \frac{x_{n-2} \alpha_{n-3} - x_{n-3} \alpha_{n-1}}{x_{n-2}}$$

$$y_{n-4} = \dots$$

$$\vdots$$

■ **Propriétés :**

- Une **Condition Nécessaire et Suffisante** pour que les racines de l'équation caractéristique en w soient toutes à partie réelle négative est que les coefficients de la première colonne du tableau de Routh soient tous de même signe.
Le nombre de racines instables (c'est-à-dire à partie réelle positive) est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne.
- Une **Condition Nécessaire** pour que les racines de l'équation caractéristique en w soient toutes à partie réelle négative, mais non suffisante, est que tous les coefficients de ce polynôme α_k soient de même signe.

Remarques :

- Ce critère marche quel que soit l'ordre du système.
- Un tel critère ne donne aucune indication sur le degré de stabilité comme la marge de gain ou la marge de phase.
- Il ne s'applique pas aux systèmes contenant un retard.
- Un moyen de vérifier que le tableau de Routh est correctement construit est de vérifier que le terme de la dernière ligne de la première colonne n'est autre que le coefficient α_0 .

Exemple :

Reprenons l'exemple traité au chapitre 5, section 5.4 :

$$A(p) = \frac{A_0}{p + a} \quad (6.22)$$

dont l'équation caractéristique en z est :

$$(z - e^{-aT}) + \frac{A_0}{a} (1 - e^{-aT}) = 0 \quad (6.23)$$

– Calculer l'équation caractéristique en w :

– Dresser le tableau de Routh :

– En déduire les conditions de stabilité :

6.3 Critères géométriques

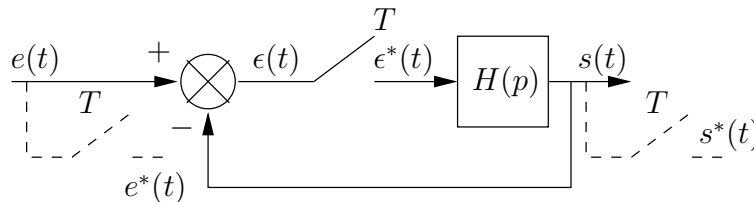
Les critères géométriques sont très souvent utilisés dans l'étude de la stabilité des systèmes asservis continus car, en plus de l'information "stable" ou "instable", ils permettent d'avoir une mesure du *degré de stabilité* des systèmes asservis via la *marge de gain* et la *marge de phase*. Ces mêmes critères sont applicables aux systèmes asservis échantillonnés avec toutefois quelques précautions d'usage. Pour ceux-ci, les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée sont les racines d'une équation caractéristique pouvant être mise sous la forme :

$$1 + k H(z) = 0 \quad (6.24)$$

où k est un scalaire positif.

6.3.1 Critère de Nyquist

Le critère de Nyquist permet de savoir si les racines d'une expression de la forme (6.24) avec $k = 1$ fixé, sont à partie réelle négative en raisonnant sur le lieu de Nyquist de la fonction de transfert échantillonnée.



Méthode pour le tracé du lieu de Nyquist pour les systèmes échantillonnés :

Pour les systèmes échantillonnés, le tracé du lieu de Nyquist peut être obtenu de deux façons différentes :

- soit à partir de la fonction de transfert $H(z)$ puis en remplaçant z par $e^{j\omega T}$. On calcule alors le nombre complexe résultant du calcul de $H(e^{j\omega T})$. Dans ce cas, la pulsation ω varie de 0 à ω_N , pulsation de Nyquist où $\omega_N = 2\pi f_N = \frac{\pi}{T}$ (voir le chapitre 2).
- Soit à partir de la fonction de transfert en w de $H(z)$. Appelons $\tilde{H}(w)$ cette fonction de transfert. On a la relation

$$\tilde{H}(w) = H(z) \quad (6.25)$$

où

$$z = \frac{w + 1}{w - 1}, \quad (6.26)$$

et

$$w = \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (6.27)$$

En remplaçant z par $e^{j\omega T}$ dans (6.27), on montre que :

$$w = j \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right). \quad (6.28)$$

Or, lorsque ω varie de 0 à $\frac{\pi}{T}$, $\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ varie de 0 à $+\infty$. On pose alors

$$\tilde{\omega} = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (6.29)$$

On voit qu'en posant $w = j\tilde{\omega}$, où $\tilde{\omega}$ varie de 0 à $+\infty$, on obtient un changement de variable analogue au cas des systèmes continus lorsque l'on trace leur lieu de Nyquist.

C'est la deuxième approche que l'on préfère généralement utiliser car d'un point de vue pratique, dès que l'on a calculé $\tilde{H}(w)$, la démarche pour le tracé du lieu de Nyquist est identique au cas des systèmes continus.

Remarque : La relation (6.29) montre que la variable $\tilde{\omega}$ n'a pas la signification physique de la pulsation ω . Lorsque l'on choisit la deuxième approche, il faudra veiller à faire la correspondance inverse

$$\omega = \frac{2}{T} \arctan \tilde{\omega}. \quad (6.30)$$

Pour tracer le lieu de Nyquist de la fonction de transfert $\tilde{H}(w)$, on procède suivant la démarche suivante :

1. Dresser un tableau avec en première colonne, un certain nombre de valeurs de $\tilde{\omega}$ qui soient significatives pour le tracé. Dans une deuxième colonne, reporter la vraie pulsation ω correspondante. Sur une troisième colonne, reporter le calcul de la partie réelle de $\tilde{H}(j\tilde{\omega})$ pour chacune des valeurs de ω et en dernière colonne, la partie imaginaire de $\tilde{H}(j\tilde{\omega})$.

$\tilde{\omega}$	ω	$Re(\tilde{H}(j\tilde{\omega}))$	$Im(\tilde{H}(j\tilde{\omega}))$
------------------	----------	----------------------------------	----------------------------------

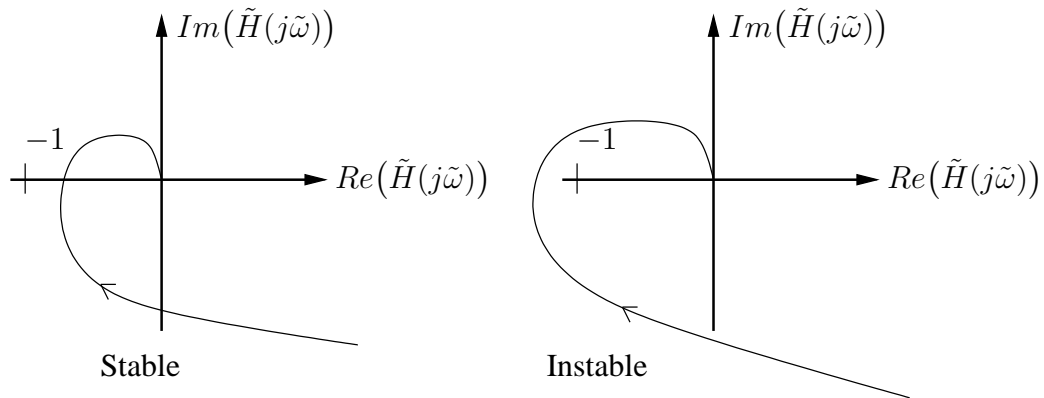
TAB. 6.1 –

2. Reporter sur un graphique représentant le plan complexe, la fonction $Im(\tilde{H}(j\tilde{\omega})) = f(Re(\tilde{H}(j\tilde{\omega})))$ point par point en précisant chaque valeur de $\tilde{\omega}$, et en reliant ces points dans le sens des $\tilde{\omega}$ croissants.
3. Placer le point critique d'affixe $-1 + 0j$.

■ **Critère de Nyquist simplifié (ou critère du revers)**

Hypothèse : Le système est stable en boucle ouverte, autrement dit la fonction de transfert en w , $H(w)$, n'a pas de pôles à partie réelle strictement positive.

Dans ce cas, le système sera stable en boucle fermée si lorsque l'on parcourt le tracé du lieu de Nyquist dans le sens des ω croissants, le point critique reste à gauche.



Les **marges de stabilité** (marge de gain et marge de phase) se déduisent alors du lieu de Nyquist comme dans le cas des systèmes continus.

6.3.2 Lieu de Bode et lieu de Black-Nichols

Les lieux de Bode et de Black-Nichols sont obtenus comme dans le cas continu lorsque l'on considère $\tilde{H}(w)$, transformée en w de $H(z)$. Pour leur tracé, on peut alors s'aider du tableau suivant :

$\tilde{\omega}$	ω	$ \tilde{H}(j\tilde{\omega}) $	$\arg(\tilde{H}(j\tilde{\omega}))$
------------------	----------	--------------------------------	------------------------------------

TAB. 6.2 –

et procéder de la même manière que pour le lieu de Nyquist. Pour le lieu de Bode, on peut aussi faire un tracé asymptotique de la fonction de transfert $\tilde{H}(w)$.

6.3.3 Lieu des racines (ou lieu d'Evans)

Ce graphique représente l'évolution des racines de l'équation (6.24) dans le plan complexe $Z = x + jy$, lorsque k varie de 0 à $+\infty$. Ainsi, il est possible de visualiser la trajectoire de chaque pôle depuis leur position en boucle ouverte. Il présente un intérêt puisque lorsque $k = 1$, les racines de (6.24) sont les pôles du système en boucle fermée.

Il existe des règles, dont nous nous ferons pas mention dans ces notes pour le tracé asymptotique des trajectoires. Nous recommandons au lecteur les quelques références bibliographiques pour plus de détails.

Chapitre 7

Etude de la précision

En plus de la stabilité, un système asservi doit présenter d'autres qualités lui permettant d'assurer des performances satisfaisantes. Dans ce chapitre, la précision est étudiée. Les systèmes bouclés considérés ici sont supposés stables.

■ Définition

La précision est la capacité d'un système à suivre un ensemble de consignes particulières avec une erreur acceptable par le cahier des charges.

On distingue deux types de précision :

- la *précision statique* qui caractérise, pour une entrée donnée, la limite de l'erreur dite *statique* au bout d'un temps infini, c'est-à-dire bien plus grand que la durée de la réponse libre du système. On parle de *régime permanent* ou encore de *régime établi*,
- la *précision dynamique* qui tient compte des caractéristiques d'évolution du processus principalement pendant le *régime transitoire*, c'est-à-dire sur un horizon de l'ordre de grandeur de la durée de la réponse libre du système.

7.1 Précision statique

La structure considérée est la suivante :

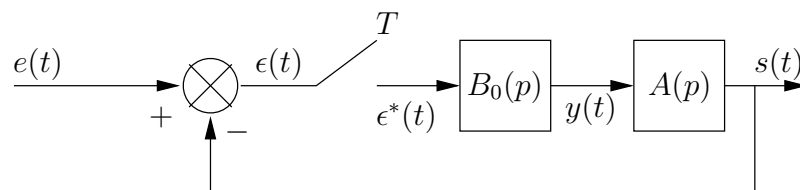


FIG. 7.1 – Système asservi (\mathcal{S})

Comme indiqué au paragraphe 5.3, la transformée en z de l'erreur $\epsilon^*(t)$ est liée à l'entrée $e(t)$ aux instants d'échantillonnage, soit $e^*(t)$, par la relation :

$$\mathcal{E}(z) = \frac{1}{1 + \overline{AB_0}(z)} E(z) \quad (7.1)$$

Le système bouclé étant stable, le théorème de la valeur finale peut s'appliquer et permet d'obtenir l'erreur statique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon_n = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \mathcal{E}(z) \quad (7.2)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + \overline{AB_0}(z)} E(z) \quad (7.3)$$

L'erreur statique dépend de l'entrée test $E(z)$ qui est appliquée au système, on définit :

■ Définition

Considérons l'asservissement représenté en figure 7.1.

- L'erreur statique de position ϵ_p du système \mathcal{S} est définie comme l'erreur statique (7.3) correspondant à une entrée en échelon.
- L'erreur statique de vitesse ϵ_v du système \mathcal{S} est définie comme l'erreur statique (7.3) correspondant à une entrée en rampe.
- L'erreur statique de accélération ϵ_a du système \mathcal{S} est définie comme l'erreur statique (7.3) correspondant à une entrée en parabole.

On rappelle que :

	Signal $e^*(t)$		
	Echelon	Rampe	Parabole
Transformée en $z : E(z)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$

Il est à noter que, même si l'association "statique de vitesse" semble paradoxale, le terme "statique" se rapporte au comportement en "régime permanent" et le terme "de vitesse" à l'entrée en rampe.

De façon générale un système peut se mettre sous la forme :

$$\overline{AB_0}(z) = K \frac{G(z)}{(z-1)^c}, \quad \text{avec} \quad \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = 1 \quad (7.4)$$

Le nombre de pôles en $z = 1$, noté $c \in \mathbb{N}$, est appelé la classe du système. Il s'agit du nombre d'intégrateurs dans le bloc $A(p)$. Attention, il ne faut pas compter le terme $\frac{1}{p}$ issu du bloqueur d'ordre zéro car il n'est pas associé à un intégrateur réel. Sa présence provient de la modélisation du bloqueur. Le terme intégral du bloqueur est d'ailleurs compensé lors de l'application du théorème de la valeur finale (3.12) dans le calcul des différentes erreurs statiques.

Les précisions statiques dépendent de la classe du système et de l'entrée appliquée, comme l'indique le tableau Tab. 7.1 suivant :

		Classe			
		c = 0	c = 1	c = 2	c > 2
Erreur statique	ϵ_p	$1/(1 + K)$	0	0	0
	ϵ_v	∞	T/K	0	0
	ϵ_a	∞	∞	T^2/K	0

TAB. 7.1 – Erreurs statiques pour un système échantillonné en fonction de la classe

Au coefficient T près, il y a une analogie entre précision pour systèmes continus et systèmes échantillonnés. Comme en continu, l'erreur statique est inversement proportionnelle au gain K , à une classe fixée. Plus le gain en boucle ouverte augmente, plus la précision statique est bonne, alors que la stabilité est dégradée. La précision statique et la stabilité sont deux performances duales, *a priori* contradictoires.

7.2 Précision dynamique

La précision dynamique permet plus particulièrement d'étudier le comportement de ϵ_k pendant le régime transitoire. Cependant, l'expression de l'erreur dynamique ϵ_k est excessivement complexe dans le cas général. A titre indicatif, les grandeurs donnant des renseignements sur la précision dynamique peuvent être :

- Le maximum de l'erreur, qui caractérise le dépassement maximal :

$$\max_{n \in \mathbb{N}} |\epsilon_n| \quad (7.5)$$

- L'erreur quadratique moyenne :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (\epsilon_k)^2 \quad (7.6)$$

- L'erreur absolue moyenne, qui caractérise l'aire en valeur absolue du graphe ϵ_k :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\epsilon_n| \quad (7.7)$$

Chapitre 8

Correction des asservissements

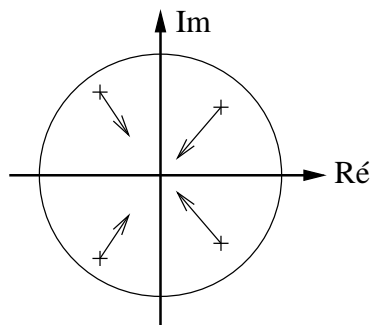
8.1 Objectifs de la correction

Les performances naturelles d'un système (stabilité, précision, rapidité, *etc...*) peuvent ne pas correspondre à un degré d'exigence spécifié dans un cahier des charges. L'objectif de toute correction est de modifier ces performances afin qu'elles respectent au mieux ce cahier des charges.

De façon qualitative :

- Pour rendre le système *stable*, il faut rassembler tous les pôles du système dans le cercle unité et pour garantir une meilleure *stabilité*, il faut éloigner le plus possible les pôles de ce cercle en les rapprochant de l'origine.

Plan z



- Pour rendre le système plus *précis*, il faut augmenter le gain statique, voire ajouter des intégrateurs pour augmenter la classe du système.
- Pour améliorer la rapidité du système, il faut augmenter la bande passante de celui-ci, en augmentant la valeur de la fréquence de coupure.

Il existe différentes structures d'asservissement numérique. Ce chapitre est consacré à la *correction numérique série* où deux approches sont détaillées :

- la correction numérique à réponse pile
- le correcteur PID numérique.

Une autre structure, bien plus intéressante quant aux possibilités offertes, appelée *structure RST*, sera brièvement présentée au chapitre 10.

8.2 Correcteurs séries : généralités

8.2.1 Structure d'un correcteur série

Le terme de *correcteur série* regroupe l'ensemble des asservissements de retour unitaire où le correcteur est placé *en série* avec le processus dans la chaîne directe, selon le schéma suivant :

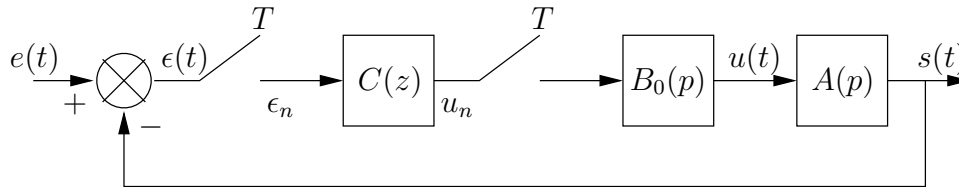


FIG. 8.1 – Correction numérique en série.

Sur ce schéma, on reconnaît la présence du CAN et du CNA avec bloqueur d'ordre zéro entourant le correcteur numérique caractérisé par sa fonction de transfert en z . Cette structure s'apparente à celle présentée au chapitre 1 en figure 1.1 lorsque le retour est unitaire.

8.2.2 Mise en équation

La présence des deux échantillonneurs synchrones permet d'isoler les transformées $C(z)$ et $\overline{AB_0}(z)$. La fonction de transfert pour cet asservissement est alors :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{C(z) \overline{AB_0}(z)}{1 + C(z) \overline{AB_0}(z)}. \quad (8.1)$$

Rappelons que la consigne $E(z)$ est donnée. Pour obtenir la sortie $S(z)$ désirée, il s'agit alors de déterminer $U(z)$, c'est-à-dire l'expression du correcteur $C(z)$ (en effet, $U(z) = C(z) \mathcal{E}(z)$).

Exemple :

Soit,

$$C(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} \quad (8.2)$$

$$= \frac{(z - b)}{(z - 1)(z - a)} \quad (8.3)$$

déterminer u_n .

8.3 Correcteurs à réponse pile

■ Définition

Un système à réponse pile est un système tel que sa réponse à une entrée type donnée est égale exactement à cette entrée au bout d'un nombre fini d'échantillons (c'est-à-dire que l'erreur statique est nulle en un temps fini).

Remarques :

- Le temps de réponse des systèmes à réponse pile est supérieur ou égal à nT , où n est l'ordre du système.
- La réponse pile d'un système n'est définie qu'aux instants d'échantillonnage, et donc, une erreur non nulle hors des instants d'échantillonnages n'est pas exclue.

La synthèse d'un correcteur à réponse pile est illustrée à travers l'exemple suivant.

Soit le processus

$$A(p) = \frac{C}{p(1 + 0,2p)}, \quad \text{avec } C = 5 \text{ rad.s}^{-1} \quad (8.4)$$

Ce système $A(p)$ étant du second ordre, on cherche une réponse pile pour une entrée en échelon unité, dont l'erreur s'annule à partir du 2^e échantillon. Ainsi les coefficients u_0 , u_1 et s_1 suffisent à déterminer une réponse pile.

$$E(z) = \sum_{k \geq 0} 1 z^{-k} = \sum_{k \geq 0} z^{-k} \quad (8.5)$$

$$S(z) = \sum_{k \geq 0} s_k z^{-k} = s_1 z^{-1} + \sum_{k \geq 2} z^{-k} \quad (8.6)$$

$$U(z) = \sum_{k \geq 0} u_k z^{-k} = u_0 + u_1 z^{-1} \quad (8.7)$$

$$\overline{B_0 A}(z) = \frac{Dz + (1 - 2D)}{(z - 1)(z - D)}, \quad \text{avec } D = e^{-1} = 0,368 \quad (8.8)$$

La sortie s et la commande du processus sont reliés par :

$$\frac{S(z)}{U(z)} = \overline{A B_0}(z) = \frac{Dz + (1 - 2D)}{(z - 1)(z - D)} \quad (8.9)$$

$$\left(s_1 z^{-1} + \sum_{k \geq 2} z^{-k} \right) (1 - (1 + D)z^{-1} + D z^{-2}) = (D z^{-1} + (1 - 2D)z^{-2}) (u_0 + u_1 z^{-1}) \quad (8.10)$$

On en déduit les relations suivantes, en identifiant les coefficients en z^{-k} :

$$\text{Terme en } z^{-1} : D u_0 = s_1 \quad (8.11)$$

$$\text{Terme en } z^{-2} : (1 - 2D)u_0 + D u_1 = 1 - (1 + D)s_1 \quad (8.12)$$

$$\text{Terme en } z^{-3} : (1 - 2D)u_1 = D s_1 + 1 - (1 + D) \quad (8.13)$$

$$\text{Terme en } z^{-k} : 1 - (1 - D) + D = 0, \quad k \geq 4. \quad (8.14)$$

Les trois premières relations nous donnent les valeurs de u_0 , u_1 et s_1 :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{1 - D} = 1,58 \\ u_1 = \frac{D}{D - 1} = -0,58 \\ s_1 = \frac{D}{1 - D} = 0,58 \end{cases} \quad (8.15)$$

Il est possible désormais de déterminer l'expression du correcteur numérique :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} \quad (8.16)$$

où

$$\mathcal{E}(z) = E(z) - S(z) = \sum_{k \geq 0} z^{-k} - \sum_{k \geq 2} z^{-k} - s_1 z^{-1} = 1 + (1 - s_1)z^{-1} \quad (8.17)$$

Finalement le correcteur $C(z)$ est donné par :

$$C(z) = \frac{U(z)}{\mathcal{E}(z)} \quad (8.18)$$

$$= \frac{u_0 + u_1 z^{-1}}{1 + z^{-1}(1 - s_1)} \quad (8.19)$$

$$= \frac{1,58 - 0,58 z^{-1}}{1 + 0,42 z^{-1}} \quad (8.20)$$

L'équation de récurrence associée est :

$$u_k = -0,42 u_{k-1} + 1,58 \epsilon_k - 0,58 \epsilon_{k-1}, \quad \forall k \geq 2 \quad (8.21)$$

■ Analyse

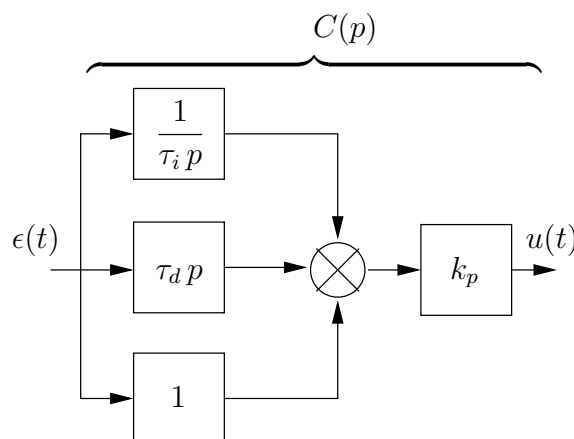
Une fois le correcteur synthétisé, il faut vérifier qu'il ne déstabilise pas l'asservissement. C'est l'étape dite d'analyse.

8.4 Correcteur PID numérique

Comme en correction analogique, l'un des principaux correcteurs utilisés est un correcteur à action *Proportionnelle, Intégrale et Dérivée*, noté PID.

8.4.1 Structure du PID numérique

La structure du PID numérique s'inspire du correcteur PID analogique.



La fonction réalisée est la suivante :

$$u(t) = u(0) + k_p \left(\epsilon(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t \epsilon(\lambda) d\lambda + \tau_d \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right), \quad (8.22)$$

qui est à comparer dans le domaine de Laplace à la fonction de transfert :

$$C(p) = k_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} + \tau_d p \right). \quad (8.23)$$

En discrétisant, on obtient :

$$u_k = k_p \left(\epsilon_k + \frac{T}{\tau_i} \sum_{j=0}^n \epsilon_j + \frac{\tau_d}{T} (\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) \right), \quad (8.24)$$

et la fonction de transfert en z :

$$C(z) = \frac{u(z)}{\epsilon(z)} = k_p + \frac{k_p T}{\tau_i} \frac{z}{z-1} + \frac{k_p \tau_d}{T} (1 - z^{-1}). \quad (8.25)$$

■ Structure PID numérique

La structure d'un PID numérique est donc de la forme :

$$C(z) = \frac{u(z)}{\epsilon(z)} \quad (8.26)$$

$$= k_p + k_i T \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_d}{T} (1 - z^{-1}) \quad (8.27)$$

Remarque :

Dans l'expression (8.24), la quantité $\sum_{j=0}^n \epsilon_j$ n'est pas facile à manipuler et à implanter sur un ordinateur, en particulier pour une question de taille de mémoire. Il est possible d'utiliser le terme $u_n - u_{n-1}$, qui se nomme *innovation*. L'équation de récurrence se réécrit alors sous la forme :

$$\underbrace{u_n - u_{n-1}}_{\text{innovation}} = k_p \left[\underbrace{(\epsilon_n - \epsilon_{n-1})}_{\substack{1^\circ \text{ différence} \\ \text{en entrée}}} + \frac{T}{\tau_i} \epsilon_n + \frac{\tau_d}{T} \underbrace{(\epsilon_n - 2\epsilon_{n-1} + \epsilon_{n-2})}_{\substack{2^\circ \text{ différence} \\ \text{en entrée}}} \right]. \quad (8.28)$$

Cette formulation ne nécessite que la connaissance de ϵ_{n-2} , ϵ_{n-1} , ϵ_n et u_{n-1} pour calculer u_n .

8.4.2 Choix du correcteur

La structure du correcteur PID fait apparaître trois actions : l'action *Proportionnelle*, l'action *Intégrale* et l'action *Dérivée*.

■ Action qualitative

Action P : augmente la bande passante, donc la rapidité ; améliore la précision et dégrade la stabilité.

Action I : ralentit le système ; améliore la précision en augmentant la classe du système et peut dégrader la stabilité. De plus, peu robuste aux perturbations basses-fréquences sur le signal de consigne.

Action D : augmente la bande passante du système donc sa rapidité, permet d'améliorer la stabilité mais amplifie les bruits de mesure hautes-fréquences.

L'action intégrale I présente d'autres inconvénients d'ordre pratique. Par exemple, l'intégrateur pur n'est pas réalisable technologiquement car cela signifierait un gain infini pour les basses fréquences. De manière similaire, l'action dérivée D présente un défaut analogue mais dans les hautes fréquences.

Il n'est pas toujours utile de faire une correction avec un correcteur qui combine toutes ces actions. Pour des améliorations spécifiques des performances, le correcteur peut être réduit :

■ Choix du correcteur

Correcteur P : améliore la précision, sans changer la classe du système.

$$u_n = k_p \epsilon_n \quad (8.29)$$

Correcteur PI : augmente la classe du système et donc améliore la précision.

$$u_n = u_{n-1} + k_p (\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) + k_i T \epsilon_n \quad (8.30)$$

Correcteur PID : augmente la classe du système, donc améliore sa précision, mais aussi la rapidité et la stabilité.

$$u_n = u_{n-1} + k_p (\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) + k_i T \epsilon_n + \frac{k_d}{T} (\epsilon_n - 2\epsilon_{n-1} + \epsilon_{n-2}) \quad (8.31)$$

8.4.3 Méthode de TAKAHASHI de réglage du PID numérique

La structure du correcteur PID numérique étant fixée, tout comme en correction analogique avec la méthode de Ziegler-Nichols, il faut déterminer la valeur des coefficients k_p , k_i et k_d . La méthode de Takahashi, décrite ci-dessous, est une option possible pour le choix de ces coefficients.

Cette méthode s'appuie sur l'analyse du comportement du système échantillonné, quand il est soumis à plusieurs tests. Pour ce faire, on considère le schéma de la figure 8.2.

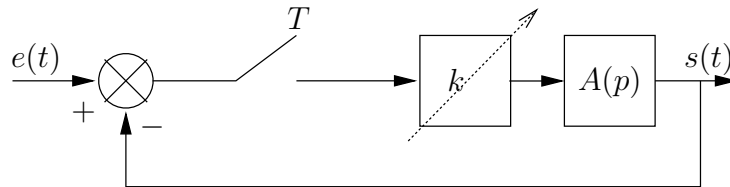


FIG. 8.2 – Structure de correction pour le réglage de Takahashi.

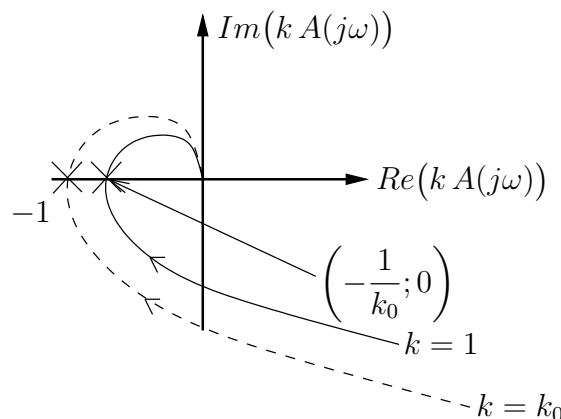
A partir d'une entrée en échelon, on part de la valeur du gain proportionnel $k = 0$ et on l'augmente progressivement jusqu'à la valeur $k = k_0$ qui correspond à la limite de la zone de stabilité c'est-à-dire, à l'apparition d'un régime auto-oscillant.

Ce gain k_0 correspond à la marge de gain et le régime auto-oscillant s'effectue la période T_0 . Les grandeurs k_0 et T_0 sont les seuls paramètres nécessaires pour régler le correcteur PID. On obtient alors le tableau suivant :

	Correcteur	Réglage
Action P	$u_n = k_p \epsilon_n$	$k_p = 0,5 k_0$
Action PI	$u_n = u_{n-1} + k_p(\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) + k_i T \epsilon_n$	$k_p = 0,45 k_0 - 0,5 k_i T$ $k_i = 0,54 \frac{k_0}{T_0}$
Action PID	$u_n = u_{n-1} + k_p(\epsilon_n - \epsilon_{n-1}) + k_i T \epsilon_n$ $+ \frac{k_d}{T}(\epsilon_n - 2\epsilon_{n-1} + \epsilon_{n-2})$	$k_p = 0,6 k_0 - 0,5 k_i T$ $k_i = 1,2 \frac{k_0}{T_0}$ $k_d = \frac{3}{40} k_0 T_0$

TAB. 8.1 – Réglage des correcteurs PID numériques par la méthode de Takahashi

Le couple de paramètres (k_0, T_0) peut aussi se lire sur le lieu de Nyquist du processus continu $A(p)$:



La méthode de Takahashi provient d'un problème d'optimisation. Les coefficients du correcteur PID sont ainsi déterminés pour minimiser le critère suivant :

$$\sum_{n \geq 0} |\epsilon_n|. \quad (8.32)$$

8.4.4 Commentaires

La méthode de Takahashi en mode régulation (consigne constante) permet des réglages généralement satisfaisants, néanmoins en mode poursuite (la consigne dépend du temps) les résultats sont médiocres.

En régulation, la deuxième différence de l'équation de récurrence (8.28) peut s'exprimer en fonction de s , comme $\epsilon = e - s$:

$$\epsilon_n - 2\epsilon_{n-1} + \epsilon_{n-2} = e_n - 2e_{n-1} + e_{n-2} \quad (8.33)$$

$$= -(s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2}) \quad (8.34)$$

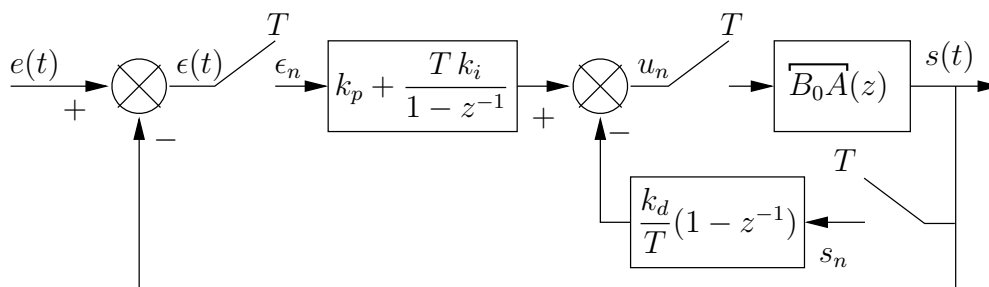
L'action D peut se traduire par :

$$u_n - u_{n-1} = -\frac{k_d}{T}(s_n - 2s_{n-1} + s_{n-2}) \quad (8.35)$$

donc par la transmittance :

$$\frac{u(z)}{s(z)} = -\frac{k_d}{T}(1 - z^{-1}) \quad (8.36)$$

Afin d'éviter de brusques discontinuités sur la commande (néfastes pour un moteur par exemple), il est préférable parfois d'adopter une structure série-parallèle afin d'éviter de faire intervenir le terme dérivateur sur la consigne :



Il y a alors un effet d'adoucissement des discontinuités par l'asservissement en parallèle (action D). Cette structure présente cependant l'inconvénient de nécessiter un autre échantillonneur synchronisé et un comparateur supplémentaire.

Chapitre 9

Correspondance analogique-numérique

9.1 Équivalence du B.O.Z. à un retard pur de T/2

Afin d'évaluer les performances dynamiques du système échantillonné dans le domaine continu, le bloqueur d'ordre zéro peut être assimilé à un retard pur de $\frac{T}{2}$. Cette approximation est d'autant plus valable que la fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T}$ est élevée par rapport à la bande passante du système. On peut résumer cela par la propriété suivante :

■ **Propriété**

La fonction de transfert analogique du bloqueur d'ordre zéro peut être approché par celle d'un retard pur de $\frac{T}{2}$.

$$\frac{1 - e^{-pT}}{p} \approx T e^{-p\frac{T}{2}} \quad (9.1)$$

Toutefois, un retard pur peut déstabiliser un système bouclé. En effet, si le module de sa fonction de transfert $e^{-pT/2}$ vaut toujours 1, son argument croît de façon linéaire avec la pulsation ω :

$$\begin{cases} |e^{-p\frac{T}{2}}| = 1 \\ \arg\left(e^{-p\frac{T}{2}}\right) = -\omega \frac{T}{2} \end{cases} \quad (9.2)$$

ce qui a pour effet de réduire la marge de phase du système et peut conduire à l'instabilité.

PRÉCAUTION : *Un asservissement numérique peut rendre instable un système, même s'il est du premier ordre.*

Exemple :

Considérons l'exemple d'un système du premier ordre

$$H(p) = \frac{H_0}{p + a}. \quad (9.3)$$

que l'on met en série avec le retard pur de $T/2$ pour modéliser le bloqueur d'ordre zéro.

- Calculer la fonction de transfert correspondante.
- Déterminer les conditions de stabilité suivant que $\omega \ll a$ et $\omega \gg a$.
- Conclure.

9.2 Correction numérique par discrétisation d'un correcteur continu

Les techniques de correction des systèmes analogiques sont bien connues. Une possibilité de synthèse d'un correcteur numérique est de concevoir d'abord un correcteur satisfaisant dans le domaine continu et d'effectuer ensuite une transformation $p \rightarrow z$ de ce dernier. Cette transformation se fait à l'aide d'une approximation de la relation $z = e^{pT}$. Il existe différentes méthodes d'approximation présentant chacune des avantages et des inconvénients quant à leur précision, leur efficacité ou leur mise en œuvre. Le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes est susceptible d'influencer la validité des résultats en termes de réponse temporelle ou fréquentielle. Deux catégories de méthodes sont présentées :

- par approximations de l'opérateur intégral,
- par techniques d'invariants.

9.2.1 Approximations de l'opérateur intégral

Méthode des rectangles ou méthode d'Euler

La fonction intégrale $x(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$ prise entre deux instants d'échantillonnage donne (par excès) :

$$x_{n+1} - x_n = \int_{nT}^{(n+1)T} e(\tau) d\tau \approx T e_{n+1}. \quad (9.4)$$

L'intégrale est approchée par la méthode des rectangles. La fonction de transfert en z associée est donc :

$$x(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}} e(z), \quad (9.5)$$

ce qui revient à dire qu'une intégration dans le domaine temporel, se traduisant par une multiplication par $1/p$ dans le domaine de Laplace, se traduit par une multiplication par $\frac{T}{1 - z^{-1}}$ dans le domaine en z .

■ Méthode d'Euler

$$p \Leftrightarrow \frac{1 - z^{-1}}{T}. \quad (9.6)$$

Cette relation peut être vue comme la discrétisation de la dérivée à droite. Dans la littérature, cette équivalence est souvent dénommée l'*équivalence à la dérivation*

Méthode des trapèzes ou méthode de Tustin

La fonction intégrale $x(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$ prise entre deux instants d'échantillonnage donne, en utilisant l'approximation par la méthode des trapèzes :

$$x_{n+1} - x_n = \int_{nT}^{(n+1)T} e(\tau) d\tau \approx \frac{T}{2} (e_{n+1} - e_n). \quad (9.7)$$

La fonction de transfert en z associée est donc :

$$x(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} e(z). \quad (9.8)$$

Cela revient à dire qu'une intégration dans le domaine temporel qui se traduit par une multiplication par $1/p$ dans le domaine de Laplace, se traduit par une multiplication par $\frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$ dans le domaine en z .

■ Méthode de Tustin

$$p \Leftrightarrow \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (9.9)$$

Dans la littérature, cette équivalence est souvent dénommée l'*équivalence à l'intégration*. Cette expression est à comparer à la transformée en w (6.17). Le demi-plan complexe de la variable p est transformé en disque trigonométrique pour la variable z . Le coefficient $T/2$ change juste la hauteur du demi-plan nécessaire pour faire un tour complet du disque trigonométrique.

9.2.2 Techniques d'invariants

Ces techniques s'appuient sur l'idée que le correcteur numérique doit fournir une suite de valeurs correspondant aux échantillons du signal de commande issu du compensateur analogique.

Invariant impulsionnel

Cette méthode consiste à conserver la réponse impulsionnelle du correcteur. Pour un système du premier ordre, on a les implications suivantes :

$$C(p) = \frac{1}{p + a} \rightarrow c(t) = e^{at} \rightarrow c_n = e^{-anT} \rightarrow C(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}. \quad (9.10)$$

■ Invariant impulsionnel

En utilisant la décomposition en éléments simples de $C(p)$:

$$C(p) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{p - p_i} \Leftrightarrow C(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{p_i T} z^{-1}}. \quad (9.11)$$

■ Propriétés

1. En plus de garder invariant la réponse impulsionnelle, la stabilité est conservée.
2. Par contre, le gain statique est modifié et dépend de la fréquence d'échantillonnage :

$$\lim_{z \rightarrow 1} C(z) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{1 - e^{p_i T}} \neq \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{-p_i}. \quad (9.12)$$

3. Il peut aussi se produire un repliement de spectre non négligeable si T est trop grand (échantillonnage lent).

Invariant indiciel

Le correcteur numérique est calculé en imposant aux réponses indicielles à temps continu et à temps discret de prendre des valeurs identiques aux instants d'échantillonnage. Les propriétés de la transformée en z donnent :

■ Invariant indiciel

$$C(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{TZ} \left[\frac{C(p)}{p} \right] \quad (9.13)$$

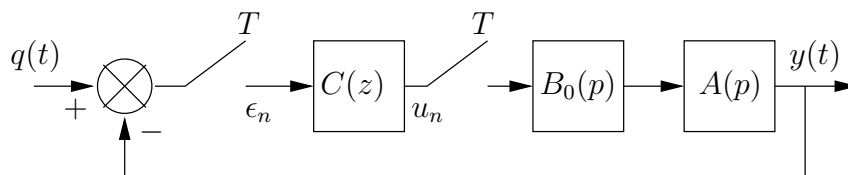
Chapitre 10

Contrôleur RST

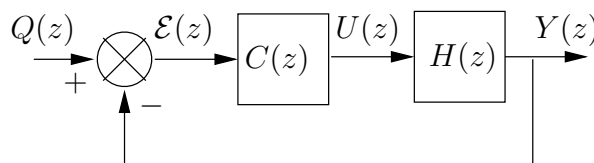
L'objectif de l'asservissement est de garantir le suivi d'une grandeur de sortie avec un signal d'entrée servant de référence au système malgré la présence de perturbations. Le rejet de perturbations est une propriété de robustesse très recherchée en asservissement. A cet effet, nous allons introduire une nouvelle structure de correction, *le correcteur RST*, plus intéressante vis-à-vis de cette propriété que la correction série classique vue au chapitre 8.

10.1 Asservissement échantillonné classique

La structure d'asservissement avec un correcteur numérique série classique se met sous la forme :



ce qui, lorsque l'on s'intéresse uniquement aux instants d'échantillonnage, devient



Les fonctions de transfert $C(z)$ et $H(z) = \overline{AB_0}(z)$ sont des fractions rationnelles en z , représentées par :

$$C(z) = \frac{S(z)}{R(z)} \quad \text{et} \quad H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (10.1)$$

Il est important de noter que les termes $A(z)$, $B(z)$, $S(z)$ et $R(z)$ sont des polynômes en z et non des fractions rationnelles en z . En boucle fermée, on obtient :

$$\frac{Y(z)}{Q(z)} = \frac{C(z)H(z)}{1 + C(z)H(z)} = \frac{B(z)S(z)}{A(z)R(z) + S(z)B(z)} \quad (10.2)$$

Par ailleurs

$$U(z) = \mathcal{E}(z) C(z) = [Q(z) - Y(z)] \frac{S(z)}{R(z)}. \quad (10.3)$$

Soit

$$R(z)U(z) = S(z) [Q(z) - Y(z)] \quad (10.4)$$

Dans le domaine temporel, cela se traduit par

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i u_{k-i} = \sum_{j=0}^{\infty} (q_{k-j} - y_{k-j}). \quad (10.5)$$

Il est à noter que dans les sommes précédentes, il n'y a toujours qu'un nombre **fini** de termes non nuls car les signaux sont causaux.

10.2 Asservissement numérique avec contrôleur RST

La relation (10.4) montre que les signaux de référence $Q(z)$ et de sortie $Y(z)$ sont traités de la même manière par le correcteur. Le fondement du correcteur RST est d'introduire un degré de liberté supplémentaire afin de traiter différemment les signaux $Q(z)$ et $Y(z)$:

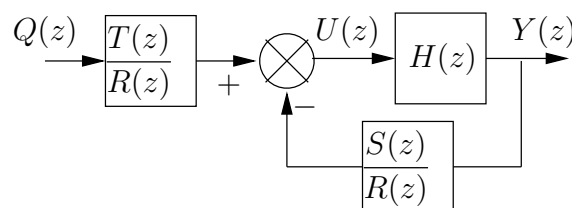
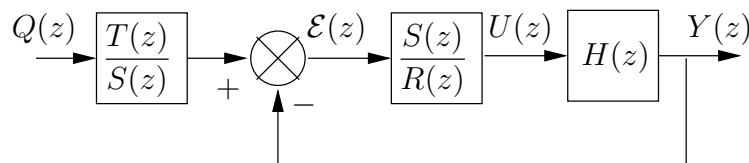
$$R(z)U(z) = T(z)Q(z) - S(z)Y(z). \quad (10.6)$$

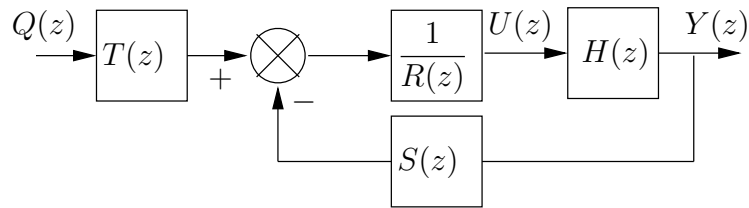
En terme de schéma bloc, il est possible de faire apparaître plusieurs structures qui représentent rigoureusement cette correction :

$$U(z) = \frac{T(z)}{R(z)}Q(z) - \frac{S(z)}{R(z)}Y(z) \quad (10.7)$$

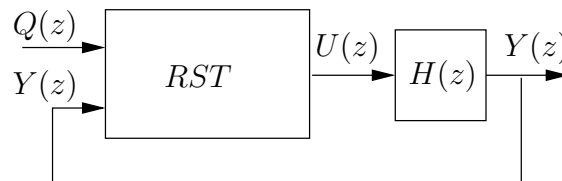
$$= \frac{1}{R(z)} [T(z)Q(z) - S(z)Y(z)] \quad (10.8)$$

$$= \frac{S(z)}{R(z)} \left[\frac{T(z)}{S(z)}Q(z) - Y(z) \right]. \quad (10.9)$$





Toutes ces représentations équivalentes sont notées :



10.3 Conséquences sur les relations de récurrences

En notant $F(z)$ la fonction de transfert globale entre l'entrée $Q(z)$ et la sortie $Y(z)$, on obtient :

$$F(z) = \frac{Y(z)}{Q(z)} = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{n_0 + n_1 z + n_2 z^2 + \dots + n_L z^L}{d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_K z^K}. \quad (10.10)$$

En développant la série :

$$(d_0 + \dots + d_K z^K) \sum_{k \geq 0} y_k z^{-k} = (n_0 + \dots + n_L z^L) \sum_{k \geq 0} q_k z^{-k}, \quad (10.11)$$

le terme général en z^{-k} donne la relation de récurrence :

$$y_k d_0 + y_{k+1} d_1 + \dots + y_{k+K} d_K = q_k n_0 + q_{k+1} n_1 + \dots + q_{k+L} n_L. \quad (10.12)$$

Différentes situations sont à discuter :

K=L : $N(z)$ et $D(z)$ sont de même degré. La sortie y_k s'exprime à partir des q_k et des échantillons précédents. Pour cela, il faut que le temps de calcul T_{calcul} introduit par le calculateur soit petit devant la période d'échantillonnage : $T \gg T_{\text{calcul}}$ sinon la sortie n'a pas le temps d'être calculée.

K>L : $\deg N(z) < \deg D(z)$. la sortie y_k s'exprime à partir de q_{k-1} et des échantillons précédents. Cette situation est à retenir lorsque le calculateur n'est pas rapide $T \approx T_{\text{calcul}}$.

K<L : cas absurde, car non causal.

■ **Choix des degrés**

Pour un temps de calcul négligeable devant T , il faut que :

$$\deg S(z) \leq \deg R(z), \quad (10.13)$$

$$\deg T(z) \leq \deg R(z). \quad (10.14)$$

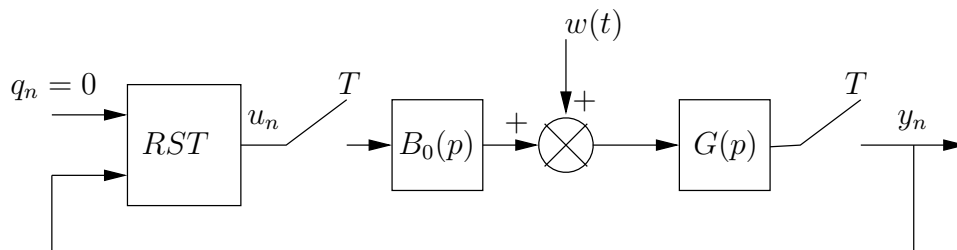
Pour un temps de calcul non négligeable devant T , il faut que :

$$\deg S(z) < \deg R(z), \quad (10.15)$$

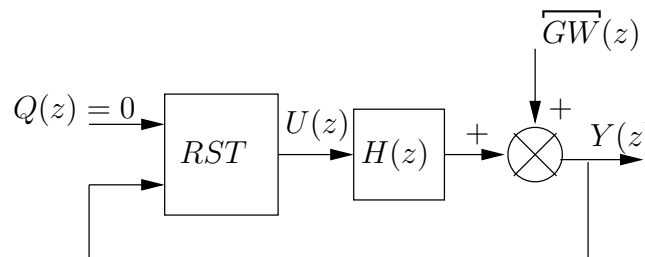
$$\deg T(z) < \deg R(z). \quad (10.16)$$

10.4 Rejet de Perturbation par RST

Dans cette partie, on considère le schéma suivant où $w(t)$ est une perturbation analogique dont l'effet sur la sortie doit être rejeté. Tant que l'on s'intéresse à l'effet de cette perturbation alors l'entrée $q(t) = 0$.



En ne s'intéressant uniquement aux instants d'échantillonnage, on obtient :



où

$$H(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{TZ} \left[\frac{G(p)}{p} \right] \quad \text{et} \quad P(z) = \overline{GW}(z) \quad (10.17)$$

Comme $q(t) = 0 \forall t \geq 0$, la relation entre la perturbation et la sortie en boucle fermée est :

$$Y(z) = \frac{P(z) R(z)}{R(z) + H(z) S(z)} = \frac{R(z)}{R(z) + H(z) S(z)} \overline{GW}(z) \quad (10.18)$$

Le rejet de perturbation doit permettre de satisfaire, à entrée nulle ($q(t) = 0$), la relation

$$s_n n \xrightarrow{\rightarrow} +\infty 0. \quad (10.19)$$

En utilisant le théorème de la valeur finale, on obtient alors :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{P(z) \frac{R(z)}{S(z)}}{\frac{R(z)}{S(z)} + H(z)} = 0 \quad (10.20)$$

Pour cela, on choisit un polynôme $R(z)$ possédant autant de zéros en $z = 1$ qu'il n'y a de pôles en $z = 1$ au dénominateur. Il faut cependant faire attention à l'effet déstabilisant possible de cette action.

Remarque :

Le rejet de perturbation impose une contrainte uniquement sur les racines du polynôme $R(z)$. Les polynômes $T(z)$ et $S(z)$ n'interviennent pas. Le polynôme $S(z)$ étant dans la boucle d'asservissement, on peut choisir ses racines afin de conférer d'autres propriétés à l'asservissement comme par exemple la stabilité ou la rapidité.

10.5 Synthèse par RST

Le but de la synthèse RST est d'élaborer une sortie $Y(z)$ image de l'entrée $Q(z)$ via la caractéristique de transfert $Y(z) = f(Q(z))$ recherchée. Celle-ci est donnée par le cahier des charges et elle est appelée *gabarit fréquentiel*. Dans le cas des systèmes linéaires, elle s'écrit simplement

$$Y(z) = F(z)Q(z) \quad (10.21)$$

On considère ici, grâce à la linéarité, qu'il n'y a pas de perturbation, ou bien qu'elle est déjà rejetée. Alors, le transfert en boucle fermée s'écrit :

$$\frac{Y(z)}{Q(z)} = F(z) = \frac{H(z) \frac{T(z)}{R(z)}}{1 + H(z) \frac{S(z)}{R(z)}}. \quad (10.22)$$

Le gabarit $F(z)$ et le rapport $\frac{S(z)}{R(z)}$ étant donnés, la synthèse du correcteur RST consiste à rendre le rapport $\frac{T(z)}{R(z)}$ comme suit :

$$\frac{T(z)}{R(z)} = \frac{F(z)}{H(z)} \times \left[1 + H(z) \frac{S(z)}{R(z)} \right]. \quad (10.23)$$

Remarque :

Le rapport $\frac{T(z)}{R(z)}$ agissant en amont de la boucle d'asservissement, il n'a pas d'influence sur la stabilité de la structure.

On pourra noter que l'hypothèse $Y(z) = F(z)Q(z)$ permet de donner une expression simplifiée de la commande :

$$U(z) = \frac{F(z)}{H(z)} Q(z). \quad (10.24)$$

11

Rappels mathématiques

Dans cette annexe, nous rappelons les principaux outils mathématiques nécessaires aux notions introduites dans ce cours. Par ailleurs, on trouvera aussi la table de conversion des principaux signaux temporels avec les transformées en z et de Laplace correspondantes (voir tableau 11.1).

11.1 Polynômes

Un polynôme P de degré n est défini comme

$$P(X) = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_n,$$

avec $a_0 \neq 0$. Ici n est un entier naturel et a_0, a_1, \dots, a_n sont des nombres complexes. Si k est un entier naturel, on note $P^{(k)}$ le polynôme obtenu en dérivant k fois P . Il est d'usage de noter $P^{(0)}$ et $P^{(1)}$ simplement par P et P' . Il faut remarquer que $P^{(n)}$ est un polynôme constant et que $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul.

Une racine λ d'un polynôme P est un nombre complexe vérifiant

$$P(\lambda) = 0.$$

La *multiplicité algébrique* d'une racine λ d'un polynôme P est l'entier m tel que λ est racine des polynômes $P, P', \dots, P^{(m-1)}$ mais $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$. On note souvent la multiplicité algébrique de λ par $m(\lambda)$. Ainsi λ est de multiplicité un ($m(\lambda) = 1$) si $P(\lambda) = 0$ et $P'(\lambda) \neq 0$. Une telle racine est dite *simple*.

De même, λ est de multiplicité trois ($m(\lambda) = 3$), alors $P(\lambda) = 0, P'(\lambda) = 0, P^{(2)}(\lambda) = 0$, et $P^{(3)}(\lambda) \neq 0$. De manière générale, une racine est dite *multiple* si sa multiplicité algébrique est supérieure à un.

On définit aussi la multiplicité algébrique comme suit : $m(\lambda)$ est le plus grand entier m tel que l'on puisse écrire

$$P(X) = (X - \lambda)^m Q(X),$$

avec Q polynôme de degré $n - m$ et $Q(\lambda) \neq 0$.

■ Polynômes irréductibles

Les polynômes irréductibles sur \mathbb{R} (c'est-à-dire à coefficients réels) sont du type

- $X - r$, avec r réel ;
- $aX^2 + bX + c$, avec deux racines λ_1, λ_2 qui sont complexes non réelles (c-à-d de discriminant $b^2 - 4ac$ strictement négatif). On rappelle qu'alors ces deux racines sont complexes conjugués, i.e. $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. On a aussi $b/a = -(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1)$ et $c/a = |\lambda_1|^2$.

■ Nombre de racines d'un polynôme de degré n

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$. Alors P a n racines (comptées avec leurs multiplicités algébriques).

Exemples :

- (a) $P(X) = (X - 1)(X - 2)$ est de degré deux et admet deux racines simples distinctes 1 et 2.
- (b) $P(X) = (X - 1)^2$ est de degré deux et admet une seule racine multiple, 1, de multiplicité algébrique égale à deux. Ainsi, en écrivant $P(X) = (X - 1)(X - 1)$, on a comme racines 1 et 1, c'est-à-dire que l'on a compté la racine 1 avec sa multiplicité algébrique, soit deux fois.
- (c) $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)(X - 3)^8(X - 0.5)^4$ est de degré quinze et admet quatre racines distinctes, 1, 2, 3 et 0.5. Les multiplicités algébriques respectives de ces racines sont $m(1) = 2$, $m(2) = 1$, $m(3) = 8$ et $m(0.5) = 4$. La somme des multiplicités est bien égale à quinze.

On rappelle que tout polynôme P à coefficients réels peut s'écrire (à une constante près) comme le produit de polynôme irréductibles. Chacun de ces polynôme irréductibles P_{irr} correspond à

- une racine λ de P si λ est réelle (et dans ce cas $P_{irr} = X - \lambda$);
- deux racines λ et $\bar{\lambda}$ de P si λ n'est pas réelle (et dans ce cas $P_{irr} = aX^2 + bX + c$).

■ Polynôme D -stable

Un polynôme est dit D -stable si toutes ses racines ont un module STRICTEMENT inférieur à un.

11.2 Suites récurrentes de longueur finie

■ Définition

La suite numérique $u_n, n \geq 0$, de nombres complexes est une suite récurrente de longueur l avec l entier positif, s'il existe l nombres complexes a_1, \dots, a_l , tels que $a_l \neq 0$ et, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$(R)_n : u_{n+l} = a_1 u_{n+l-1} + a_2 u_{n+l-2} + \dots + a_l u_n.$$

L'équation $(R)_n$ est appelée relation de récurrence d'ordre n .

Il est clair que la suite numérique $u_n, n \geq 0$ est déterminée de manière unique si l'on se donne u_0, \dots, u_{l-1} ainsi que les relations de récurrence $(R)_n$ pour tout $n \geq 0$. En effet, on calcule u_l à l'aide de u_0, \dots, u_{l-1} et de $(R)_0$ et les termes suivants de proche en proche.

Exemples :

- (a) suite récurrente de longueur 1 : une telle suite est définie par u_0 et la relation de récurrence d'ordre 1 suivante

$$u_{n+1} = a u_n,$$

valide pour tout $n \geq 0$. Ici a est un nombre complexe fixé (c-à-d indépendant de n). Une telle suite est aussi appelée *suite géométrique* et le coefficient a est appelé *raison*.

- (b) suite récurrente de longueur 2 : une telle suite est définie par u_0, u_1 et la relation de récurrence d'ordre 2 suivante

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, \quad (11.1)$$

valide pour tout $n \geq 0$. Ici a, b sont des nombres complexes fixés (c-à-d indépendants de n).

■ Equation caractéristique d'une suite récurrente de longueur l

Soit $u_n, n \geq 0$, la suite récurrente de longueur l définie par u_0, \dots, u_{l-1} et la relation de récurrence d'ordre n

$$u_{n+l} = a_1 u_{n+l-1} + a_2 u_{n+l-2} + \dots + a_l u_n.$$

Le polynôme caractéristique P_u associé à la suite u_n est le polynôme de degré l donné par

$$P_u(X) = X^l - a_1 X^{l-1} - a_2 X^{l-2} - \dots - a_l.$$

L'équation caractéristique Δ_u associée à la suite u_n est définie par $P_u(X) = 0$.

Les racines de l'équation caractéristique Δ_u (ou du polynôme caractéristique P_u) sont les nombres complexes λ tels que $P_u(\lambda) = 0$.

■ **Expression des termes d'une suite récurrente de longueur l**

Soit $u_n, n \geq 0$, la suite récurrente de longueur l définie par u_0, \dots, u_{l-1} et la relation de récurrence d'ordre n

$$u_{n+l} = a_1 u_{n+l-1} + a_2 u_{n+l-2} + \dots + a_l u_n.$$

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k, 1 \leq k \leq l$ les racines **DISTINCTES** de l'équation caractéristique Δ_u , de multiplicité algébrique respective $m_j := m(\lambda_j), 1 \leq j \leq k$. Il existe alors k polynômes P_j de degré $m_j - 1$ tels que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = P_1(n)\lambda_1^n + \dots + P_k(n)\lambda_k^n.$$

Les coefficients des polynômes P_j se calculent à partir de u_0, \dots, u_{l-1} .

Exemples :

- (a) Soit u_n la suite géométrique $u_{n+1} = au_n$. L'équation caractéristique est donnée par $X - a = 0$ et admet une unique racine simple a . En appliquant ce qui précède, on en déduit que, pour $n \geq 0$,

$$u_n = P_1(n)a^n,$$

avec P_1 polynôme de degré 0, c-à-d que P_1 est égale à une constante, K . On a alors $u_n = Ka^n$. En prenant $n = 0$, on obtient $K = u_0$. Finalement, on a, pour tout $n \geq 0, u_n = a^n u_0$.

- (b) Soit u_n , une suite récurrente de longueur 2 vérifiant (11.1). L'équation caractéristique est donnée par $X^2 - aX - b = 0$ et les racines (complexes) sont λ_1 et λ_2 . On distingue deux cas, suivant que λ_1 et λ_2 sont distinctes ou non.

- (i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En appliquant la procédure qui précède, on en déduit que, pour $n \geq 0$,

$$u_n = K_1 \lambda_1^n + K_2 \lambda_2^n,$$

et les constantes K_1, K_2 s'obtiennent en prenant $n = 0$ puis $n = 1$ dans l'équation ci-dessus.

- (ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. En appliquant la procédure qui précède, on en déduit que, pour $n \geq 0$,

$$u_n = P_1(n)\lambda^n,$$

avec P_1 polynôme de degré 1, c-à-d que $P_1(X) = pX + q$. Les constantes p, q s'obtiennent en prenant $n = 0$ puis $n = 1$ dans l'équation ci-dessus.

Comme corollaire à ce qui précède, on a le résultat suivant.

■ **Condition de convergence asymptotique vers zéro d'une suite récurrente de longueur l**

Le terme général u_n d'une suite récurrente de longueur l converge vers zéro quand n tend vers l'infini si et seulement si les racines de l'équation caractéristique sont de module **STRICTEMENT** inférieur à un.

11.3 Décomposition en éléments simples

Etant donnée une fraction rationnelle $R(X) := \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec P, Q polynômes, on cherche à exprimer $R(X)$ comme SOMME de fractions rationnelles “simples” appelées *éléments simples*. Cela sert pour l’intégration de R ou le calcul de transformées de Laplace inverse. Pour ce type de calculs, on peut toujours supposer que $p < q$, où p est le degré de P et q , celui de Q . En effet, dans le cas contraire, on effectue d’abord une division euclidienne de P par Q et l’on est ramené au cas réduit $p < q$. Dans la suite, on supposera donc $p < q$.

■ *Eléments simples*

Les éléments simples sur \mathbb{R} sont les fractions rationnelles suivantes

- (1.) $\frac{1}{(X-a)^m}$, avec a nombre réel et m entier positif;
- (2.) $\frac{cx+d}{(X^2+aX+b)^m}$, avec a, b, c, d nombres réels et m entier positif; de plus les racines de $X^2 + aX + b$ sont des nombres complexes non réelles (i.e. $a^2 - 4b < 0$).

Exemples : $\frac{1}{X-1}, \frac{1}{(X-1)^2}, \frac{1}{X^2+1}, \frac{X}{X^2+1}, \frac{X+1}{(X^2+1)^4}$.

■ *Résultat fondamental de la décomposition en éléments simples*

Soit $R(X) := \frac{P(X)}{Q(X)}$ avec P, Q polynômes de degrés respectifs p, q tels que $p < q$. On suppose que $Q(X)$ se décompose en polynômes irréductibles sous la forme

$$Q(X) = a(X-r_1)^{m(r_1)} \cdots (X-r_s)^{m(r_s)} (X^2+a_1X+b_1)^{m_1} \cdots (X^2+a_tX+b_t)^{m_t}.$$

Ici, r_1, \dots, r_s sont les racines réelles de Q , de multiplicités respectives $m(r_1), \dots, m(r_s)$ et $X^2 + a_1X + b_1, \dots, X^2 + a_tX + b_t$ représentent les racines de Q non réelles de multiplicités respectives m_1, \dots, m_t . On a bien sur $s + 2t = q$.

Alors $R(X)$ admet la décomposition en éléments simples suivante

$$R(X) = \sum_{i=1}^s \left(\sum_{j_i=1}^{m(r_i)} \frac{\alpha_{j_i}}{(X-r_i)^{j_i}} \right) + \sum_{k=1}^t \left(\sum_{l_k=1}^{m_k} \frac{\beta_{l_k}X + \gamma_{l_k}}{(X^2 + a_kX + b_k)^{l_k}} \right),$$

avec $\alpha_{j_i}, \beta_{l_k}, \gamma_{l_k}$ des nombres réels.

11.4 Applications aux fractions rationnelles

■ *Fraction rationnelle*

Une fraction rationnelle $E(X)$ est le rapport de deux polynômes $P(X)$, appelé numérateur, et $Q(X)$ (non nul), appelé dénominateur.

On a le résultat suivant, dont le point de départ de la démonstration est une décomposition

en éléments simples puis une factorisation judicieuse.

■ **Développement en série de Laurent d'une fraction rationnelle**

Toute fraction rationnelle $E(X)$ admet un développement en série de Laurent du type

$$E(X) = P_0(X) + \sum_{n=1}^{\infty} e_n X^{-n}.$$

De plus, les coefficients e_n vérifient une relation de récurrence de longueur finie.

Il est bon savoir que toute série de Laurent E , dont les coefficients vérifient une relation de récurrence de longueur finie, est en fait une fraction rationnelle.

TAB. 11.1: Tableau des transformées en z usuelles.

$G(p)$	$g(nT)$	$G(z)$
$\frac{1}{p}$	$u(nT)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	nT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2!}(nT)^2$	$\frac{T^2(z+1)z}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-anT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$nT e^{-anT}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-anT}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z - e^{-aT})(z - 1)}$
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$(1 - anT) e^{-anT}$	$\frac{z [z - e^{-aT}(1 + aT)]}{(z - e^{-aT})^2}$
$\frac{a^2}{(p+a)^2 p}$	$1 - (1 + anT)e^{-anT}$	$\frac{z [z(1 - e^{-aT} - aT e^{-aT}) + e^{-2aT} - e^{-aT} + aT e^{-aT}]}{(z - e^{-aT})^2(z - 1)}$
$\frac{a}{p^2 + a^2}$	$\sin(anT)$	$\frac{z \sin(aT)}{z^2 - (2 \cos(aT))z + 1}$
$\frac{p}{p^2 + a^2}$	$\cos(anT)$	$\frac{z(z - \cos(aT))}{z^2 - (2 \cos(aT))z + 1}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-anT} \cos(bnT)$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos(bT))}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos(bT))z + e^{-2aT}}$
$\frac{b}{(p+a)^2 + b^2}$	$e^{-anT} \sin(bnT)$	$\frac{z e^{-aT} \sin(bT)}{z^2 - 2e^{-aT}(\cos(bT))z + e^{-2aT}}$

Bibliographie

- [1] G. Blanchet and J. Prado. *ELEMENTS D'AUTOMATIQUE*. Collection Pédagogique de Télécommunication. Ellipses, 1995.
- [2] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, and I. Zambettakis. *AUTOMATIQUE ANALYSE ET RÉGULATION DES PROCESSUS INDUSTRIELS, TOME 2 RÉGULATION NUMÉRIQUE*. Méthodes et pratiques de l'ingénieur. Editions Technip, 1993.
- [3] A. Crosnier, G. Abba, B. Jouvencel, and R. Zatata. *AUTOMATIQUE INGÉNIERIE DE LA COMMANDE DES SYSTÈMES Techniques de bases*. TECHNOSUP. Ellipses, 2001.
- [4] G.F. Franklin, J.D. Powell, and M. Workman. *DIGITAL CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS*. Pearson International Edition, third edition, 1997.
- [5] Y. Granjon. *AUTOMATIQUE SYSTÈMES LINÉAIRES, NON LINÉAIRES, À TEMPS CONTINU, À TEMPS DISCRET, REPRÉSENTATION D'ÉTAT*. Sciences SUP - Cours et exercices corrigés. DUNOD, 2003.
- [6] M. Rivoire and J.L. Ferrier. *COURS D'AUTOMATIQUE TOME 1 : SIGNAUX ET SYSTÈMES*. Eyrolles, 1995.
- [7] Y. Sevely, J.L. Abatut, and F. Roubellat. *SYSTÈMES ET ASSERVISSEMENTS LINÉAIRES ÉCHANTILLONNÉS*. DUNOD Université, 1989.