Université Paris-Sud XI - ENS de Cachan
Master IST1 & IFIPS EI2, UE majeures 421-422

COMMANDE DES PROCESSUS

REPRÉSENTATION D'ÉTAT

Notes de cours

M. JUNGERS

Y. CHITOUR

Ce polycopié rassemble des **notes de cours**. Il a pour vocation de n'être qu'un support au cours associé l'UE majeure (421-422) intitulée **Commande des Processus**, partie **Représentation d'état**. Par conséquent, ce document ne dispense en aucun cas les étudiants de leur présence au cours magistral et aux TDs.

En vue d'une amélioration constante, toute remarque et commentaire sont les bienvenus.

Les auteurs

Version provisoire de novembre 2005

Table des matières

Chapitre 1

Représentation des systèmes par variables d'état et modélisation

1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques linéaires peuvent être étudiés dans le domaine temporel par un certain nombre de techniques classiques. Les méthodes les plus couramment utilisées reposent sur les représentation par équations différentielles et par réponse impulsionnelle. Les difficultées rencontrées dans l'emploi de ces méthodes temporelles, notamment lors de l'étude de systèmes relativement complexes, ont été à l'origine du développement des méthodes de transformation (transformée de Laplace et Fourier) conduisant à une représentation par fonction de transfert. L'utilité de cette transformation a été démontrée pour l'étude de la stabilité et la réponse fréquentielle. L'un des inconvéments majeurs de cette approche est de supposer les conditions initiales nulles. Ces conditions initiales jouent cependant un rôle important dans l'étude des systèmes dans l'étude des systèmes dans le domaine temporel où la solution dépend beaucoup du passé du système. Un autre inconvénient de cette approche est qu'elle s'adapte mal au cas multi-variables (plusieurs entrées, plusieurs sorties). On peut encore citer d'autres inconvénients :

- La variable de Laplace « p » interdit l'utilisation de méthode numériques.
- Les systèmes non-linéaires sont difficilement décrits par des fonctions de transfert.
- Compensation d'un pôle instable par un zéro.

La représentation par **vecteur d'état** permet de pallier à ces difficultés et d'unifier le cadre de l'étude des systèmes dynamiques continus ou discrets. Le concept d'état est utilisé chaque fois que des informations sur des variables internes sont nécessaires pour prendre une décision concernant un système. On peut donc lister certains avantages de la représentation d'état :

- Unité de la représentation ; une classe très importante de processus physiques peut être représentée par un modèle mathématique du type $\dot{x} = f(x, u, t)$.
- La représentation d'état tient compte de l'état initial (la contrainte de travailler avec des systèmes au repos est ici inutile).
- La représentation d'état est plus facilement adaptable au cas multi-variable et . donne une description des variables internes (d'où le nom aussi de représentation interne).

■ ***Définition***

> *Les* **variables d'état** $x_1, \ldots, x_n$ *représentent un ensemble de variables réelles nécessaires pour décrire le système telles que, leur connaissance à l'instant* t_0 *ainsi que celle du signal d'entrée permettent de calculer le signal de sortie pour tout* $t \geq t_0$*. L'ensemble des variables d'état forme le* **vecteur d'état***.*

Au vecteur d'état on peut associer une relation de la forme

$$x(t) = \psi(t, x(t_0), t_0, u_{[t_0,t]}), \tag{1.1}$$

où $x(t_0$ décrit l'état du système à l'instant $t = t_0$ et $u_{[t_0,t]}$ désigne les valeurs prises par l'entrée $u(t)$ entre les instants t_0 et t. La fonction ψ est généralement désignée par **fonction de transition**. En posant $x(t_0) := x_0$ la relation ci-dessus se réécrit

$$x(t) = \psi(t, x_0, t_0, u_{[t_0,t]}). \tag{1.2}$$

Pour les systèmes dynamiques rencontrés en automatique (systèmes régis par des équations différentielles), la fonction de transition ψ est obtenue en calculant la solution de l'équation différentielle

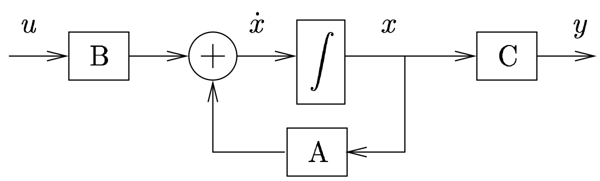
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & f(x(t), u(t), t), \\ y(t) & = & g(x(t), u(t), t), \end{array} \right. \tag{1.3}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^r$. Si $f(.)$ et $g(.)$ sont des fonctions indépendantes du temps t, le système est dit **invariant** dans le temps ou stationnaire. Si $f(.)$ et $g(.)$ sont linéaires vis à vis de x et de u, et ne dépendent pas de t, nous obtenons un système dynamique linéaire invariant dans le temps.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t), \end{array} \right. \tag{1.4}$$

avec

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	:	Matrice d'état ou matrice dynamique,
$B \in \mathbb{R}^{n \times m}$	:	Matrice d'entrée ou de commande,
$C \in \mathbb{R}^{r \times n}$	:	Matrice de sortie ou d'observation,
$D \in \mathbb{R}^{r \times m}$	:	Matrice de lien direct entrée-sortie,
n	:	Nombre d'états,
m	:	Nombre de commandes,
r	:	Nombre de sorties.



1.2 La représentation par vecteur d'état (modèle d'état)

Dans ce paragraphe, nous étudions la représentation par vecteur d'état des systèmes linéaires à temps continu. La représentation d'un système dynamique à temps continu peut être obtenue soit à partir de sa représentation par équations différentielles soit à partir de sa représentation par fonction de transfert.

Dans le traitement moderne de la théorie de la commande, différentes formes pour le modèle d'état sont considérées :
- La forme canonique de commandabilité.
- La forme canonique d'observabilité.
- La forme canonique modale.
- La forme canonique de Jordan.

1.2.1 Passage d'une équation différentielle vers un modèle d'état

Considérons le modèle général d'un système linéaire invariant représenté par une équation différentielle d'ordre n

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0y(t)\\ &\quad=b_n\frac{\mathrm{d}^n u(t)}{\mathrm{d}t^n}+b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}u(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+b_1\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+b_0u(t),\end{aligned} \tag{1.5}$$

que l'on écrira en abrégé

$$L(y)=M(u). \tag{1.6}$$

■ ***Remarque***

> *L'ordre de dérivation de l'entrée u est choisi, sans perte de généralité égal à l'ordre de dérivation de la sortie y uniquemenent pour des raisons de commodité dans les calculs qui vont suivre.*

Afin d'obtenir une procédure systématique permettant de transformer une équation différentielle d'ordre n en un modèle d'état, nous allons d'abord nous intéresser à une version simplifiée de (1.5) où les dérivées de l'entrée u n'interviennent pas :

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_0y(t)=u(t). \tag{1.7}$$

Introduisons maintenant le changement de variables suivant

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & y,\\ x_2 & = & \dot{y},\\ & \vdots & \\ x_n & = & \dfrac{\mathrm{d}^{(n-1)}y}{\mathrm{d}t^{(}n-1)}.\end{array} \tag{1.8}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2,\\ \dot{x}_2 & = & x_3,\\ & \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n,\\ \dot{x}_n & = & \dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}.\end{array} \tag{1.9}$$

De (1.7), on tire

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}=-a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}-\ldots-a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}-a_0y(t)+u(t), \tag{1.10}$$

soit, en utilisant le changement de variable (1.8) :

$$\frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n}=-a_{n-1}x_n-\ldots-a_0x_1+u \tag{1.11}$$

En remplacement dans (1.9) :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2,\\ \dot{x}_2 & = & x_3,\\ & \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n,\\ \dot{x}_n & = & -a_0x_1-\ldots-a_{n-1}x_n+u.\end{array} \tag{1.12}$$

soit sous forme vectorielle

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{B} u, \tag{1.13}$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

Soit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Ax + Bu, \\ y & = & Cx. \end{array} \right. \tag{1.15}$$

qui représente le représentation d'état de (1.7). Cette représentation d'état est connue sous le nom de **forme canonique de commandabilité**.

Nous allons maintenant étendre ce résultat au cas général défini par (1.5). Pour cela, formons tout d'abord une équation auxilaire de (1.5) ayant la forme de (1.7)

$$\frac{\mathrm{d}^n\xi(t)}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\xi(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} + a_0\xi(t) = L(\xi(t)) = u(t), \tag{1.16}$$

pour laquelle le changement de variables de la forme (1.8) s'applique, i.e.,

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \dot{\xi}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}\xi(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}. \tag{1.17}$$

Du fait de la linéarité de l'opérateur L, il vient que

$$L\left(\frac{\mathrm{d}^i\xi(t)}{\mathrm{d}t^i}\right) = \frac{\mathrm{d}^i u(t)}{\mathrm{d}t^i}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*. \tag{1.18}$$

En utilisant cette propriété, il vient que la solution de (1.5) s'écrit en fonction de $\xi(t)$, solution de (1.7) :

$$L(y) = M(u) = M(L(\xi)) = L(M(\xi)) \Rightarrow y = M(\xi). \tag{1.19}$$

Soit

$$\begin{aligned} y(t) &= b_n\frac{\mathrm{d}^n\xi(t)}{\mathrm{d}t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\xi(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + b_1\frac{\mathrm{d}\xi(t)}{\mathrm{d}t} + b_0\xi(t), \\ &= b_n\frac{\mathrm{d}^n\xi(t)}{\mathrm{d}t^n} + b_{n-1}x_n(t) + \cdots + b_1x_2(t) + b_0x_1(t). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Or

$$\frac{\mathrm{d}^n\xi(t)}{\mathrm{d}t^n} = -a_0x_1 - a_1x_2 - \cdots - a_{n-1}x_n + u, \tag{1.21}$$

ainsi,

$$y = (b_0 - b_na_0)x_1 + (b_1 - b_na_1)x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_na_{n-1})x_n + b_nu. \tag{1.22}$$

La représentation d'état de (1.5) s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{B} u, \tag{1.23}$$

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + b_n u. \tag{1.24}$$

Notons que lorsque $b_n = 0$, ce qui presque toujours le cas, l'équation de sortie prend la forme simplifiée suivante

$$y = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

Exercice
Considérons le système dynamique représenté par l'équation différentielle

$$y^{(6)} + 6y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(2)} - 5\dot{y} + 3y = 7u^{(3)} + \dot{u} + 4u. \tag{1.26}$$

Déterminer sa représentation d'état.

1.2.2 Passage de la fonction de transfert vers un modèle d'état

Pour simplifier les calculs, nous ne considérerons que le cas mono-entrée, mono-sortie. Considérons donc la fonction de transfert d'un système mono-entrée, mono-sortie

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}. \tag{1.27}$$

Pour ce système, nous introduisons une variable auxiliaire (état partiel) $V(p)$ tel que $H(p)$ se décompose de la façon suivante :

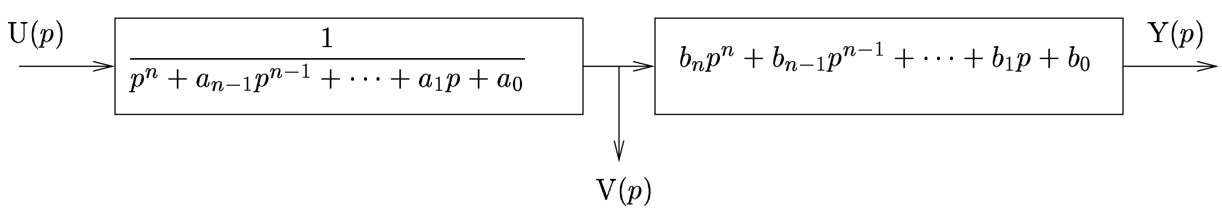


FIG. 1.1 – Décomposition d'une fonction de transfert

$$\frac{V(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}, \tag{1.28}$$

$$\frac{Y(p)}{V(p)} = b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0. \tag{1.29}$$

De (1.29), on tire que

$$y(t) = b_n v^{(n)}(t) + \cdots + b_1 \dot{v}(t) + b_0 v(t). \tag{1.30}$$

De même, de (1.28) on a

$$u(t) = v^{(n)}(t) + a_{n-1} v^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 v(t), \tag{1.31}$$

soit,

$$v^{(n)}(t) = -a_{n-1} v^{(n-1)}(t) - \cdots - a_0 v(t) - u(t). \tag{1.32}$$

En posant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & v, \\ x_2 & = & \dot{v}, \\ & \vdots & \\ x_n & = & v^{(n-1)}. \end{array} \right. \tag{1.33}$$

on obtient,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & x_3, \\ & \vdots & \\ \dot{x}_n & = & v^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + u. \end{array} \right. \tag{1.34}$$

En outre, de (1.28) et (1.29), la sortie $y(t)$ prend la forme

$$y = (b_0 - b_n a_0) x_1 + (b_1 - b_n a_1) x_2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) x_n + b_n u, \tag{1.35}$$

soit, sous forme vectorielle

$$y = \left(\begin{array}{cccc} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) + b_n u. \tag{1.36}$$

On retombe ainsi sur la forme canonique de commandabilité. Il existe d'autres formes canoniques (cf chapitre suivant).

Exercice

Donner la forme canonique de commandabiiité du système (bras flexible) dont la fonction de transfert est donnée par

$$H(p) = \frac{1,65p^4 - 0,33p^3 - 5,67p^2 + 90,6p + 19080}{p^6 + 0,99p^5 + 463p^4 + 97,8p^3 + 12131p^2 + 8,11p}. \tag{1.37}$$

1.2.3 Passage d'un modèle d'état vers la fonction de transfert

Considérons la réprésentation d'état

$$\begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{array} \tag{1.38}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^r$. En appliquant la transformée de Laplace à (1.38), il vient que

$$\begin{array}{l} pX(p) - x(0^+) = AX(p) + BU(p) \\ \qquad \Rightarrow X(p) = (pI_n - A)^{-1} x(0) + (pI_n - A)^{-1} BU(p), \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \\ \qquad \Rightarrow Y(p) = C(pI_n - A)^{-1} x(0) + \left[C(pI_n - A)^{-1} B + D \right] U(p). \end{array} \tag{1.39}$$

Pour des conditions initiales nulles (hypothèse de base pour le calcul des fonctions de transfert), nous obtenons

$$Y(p) = \left[C(pI_n - A)^{-1}B + D\right]U(p). \tag{1.40}$$

En posant

$$H(p) = C(pI_n - A)^{-1}B + D = \frac{C\ \text{Adj}(pI_n - A)B}{\det(pI_n - A)} + D, \tag{1.41}$$

il vient que

$$Y(p) = H(p)U(p). \tag{1.42}$$

$H(p)$ est désigné par **fonction de transfert du système**.

$$H(p) = \begin{bmatrix} H_{11}(p) & \cdots & H_{1m}(p) \\ \vdots & H_{ij}(p) & \vdots \\ H_{r1}(p) & \cdots & H_{rm}(p) \end{bmatrix}. \tag{1.43}$$

La fonction de transfert est une matrice de dimension $r \times m$ dont les éléments sont des fonctions rationnelles en l'opérateur de Laplace p. L'élément $H_{ij}(p)$ représente la fonction de transfert entre la sortie $y_i(t)$ et l'entrée $u_j(t)$.

1.2.4 Résolution de l'équation d'état

Quelle que soit la forme adoptée pour la représentation d'état, un système linéaire invariant est décrit par un ensemble de n équations différentielles du premier ordre.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.44}$$

$$y = Cx + Du. \tag{1.45}$$

Le problème de la commande classique est de déterminer $u(t)$ afin que $x(t)$, et par conséquent $y(t)$, suive une loi prédéfinie (le problème de la détermination de $u(t)$ sera traité ultérieurement). Il est donc nécessaire d'étudier le comportement de $x(t)$ et $y(t)$. Or $y(t)$ est lié à $x(t)$ par l'équation algébrique (1.45), ainsi pour obtenir le comportement de $y(t)$ il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle du premier ordre (1.44) autrement dit de déterminer $x(t)$.

Le cas scalaire

Considérons l'équation différentielle scalaire du premier ordre

$$\dot{x} = ax + bu, \tag{1.46}$$

avec la condition initiale $x(t_0)$.
Résolution du problème homogène :

$$\dot{x} = ax, \qquad x(t) = x(t_0)e^{a(t-t_0)}. \tag{1.47}$$

Résolution du problème avec second membre :
On utilise la méthode de la variation de la constante, c'est-à-direque l'on cherche une solution pour (1.46) sous la forme

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}z(t). \tag{1.48}$$

On en déduit :

- ***Forme générale de*** $x(t)$

La solution de (1.46) s'écrit sous la forme

$$x(t) = \underbrace{e^{a(t-t_0)}x(t_0)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{(a(t-t_0)}bu(\tau)\mathrm{d}\tau}_{\text{réponse forcée}}\,. \tag{1.49}$$

Le résultat précédent peut également être obtenu en appliquant la transformation de Laplace à (1.46). En effet

$$pX(p) - x(0) = aX(p) + bU(p), \tag{1.50}$$

où $X(p)$ et $U(p)$ représentent les tranformées de Laplace de $x(t)$ et $u(t)$ respectivement. De la relation précédente, on déduit que

$$X(p) = \frac{1}{p-a}x_0 + G(p)U(p), \tag{1.51}$$

où $G(p) := \dfrac{b}{p-a}$. Par application de la transformation de Laplace inverse, il vient

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau}_{\text{produit de convolution}} = e^{a(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.52}$$

d'où le résultat.

Le cas vectoriel

■ ***Définition***

Par analogie au cas scalaire, on définit **l'exponentielle d'une matrice carrée** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *de la façon suivante*

$$\exp(A) = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}, \quad \textit{avec } A^0 := I_n. \tag{1.53}$$

I_n *représentant ici la matrice identité de dimension* $n \times n$.

Nous allons, comme pour le cas scalaire, résoudre tout d'abord le problème homogène, c'est-à-dire,

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{1.54}$$

On démontre aisément que

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0. \tag{1.55}$$

■ ***Définition***

La matrice $e^{A(t-t_0)}$ *est désignée sous le nom de* **matrice de transition** *car elle établit la correspondance entre l'état du système à un instant* t *et l'état initial à l'instant* t_0*. On utilise souvent la notation*

$$\phi(t, t_0) = \phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)}. \tag{1.56}$$

Cette matrice joue un rôle très important dans la théorie des systèmes dynamiques linéaires. Dans ce qui suit, nous allons donner les principales propriétés de cette matrice.

■ ***Propriétés de la matrice de transition***

> $\forall t$:
> - $\phi(t)$ *satisfait l'équation linéaire homogène*
>
> $$\frac{\partial \phi(t)}{\partial t} = A\phi(t) = \phi(t)A, \tag{1.57}$$
>
> - $\phi(0) = I_n$,
> - $\phi(t_2 - t_1)\phi(t_1 - t_0) = \phi(t_2 - t_0)$,
> - ϕ *est toujours inversible d'inverse* $\phi^{-1}(t) = \phi(-t)$.

Nous allons maintenant résoudre le problème non homogène

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0. \tag{1.58}$$

Comme pour le cas scalaire on cherche une solution de la forme (méthode de la variation de la constante)

$$x(t) = e^{At}z(t). \tag{1.59}$$

En remplaçant $x(t)$ dans l'équation (1.58), on obtient immédiatement que

$$\dot{z}(t) = e^{-At}Bu(t), \tag{1.60}$$

ainsi

$$z(t) = z(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{1.61}$$

soit finalement

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.62}$$

Dans le cas où le système est initialisé en $x(t_0)$ au lieu de $x(0)$, on démontre de façon similaire que

■ ***Forme générale de*** $x(t)$

> $$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{1.63}$$

Un résultat équivalent peut être obtenu en utilisant la transformée de Laplace. Pour ce faire appliquons la transformée de Laplace à la relation (1.58)

$$\begin{aligned} &pX(p) - x(0) = AX(p) + BU(p) \\ &\iff X(p) = (pI_n - A)^{-1}x(0) + (pI_n - A)^{-1}BU(p). \end{aligned} \tag{1.64}$$

Or $\dfrac{\partial \phi(t)}{\partial t} = A\phi(t)$ (cf. propriétés de la matrice de transition), soit par transformation de Laplace, $\Phi(p) = (pI_n - A)^{-1}$, $\Phi(p)$ représentant ici la transformation de Laplace de $\phi(t)$. On en déduit ainsi que

$$X(p) = \Phi(p)x(0) + \Phi(p)BU(p). \tag{1.65}$$

En appliquant maintenant la transformation de Laplace inverse, on obtient immédiatement que

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ &= e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{1.66}$$

d'où le résultat.

1.2.5 Résolution de la matrice de transition

Méthode reposant sur la transformation de Laplace

Nous avons montrer dans la section précédente que

$$\Phi(p) = \mathcal{L}[\phi(t)] = (pI_n - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(pI_n - A)}{\det(pI_n - A)}, \tag{1.67}$$

où $\text{Adj}(pI_n - A)$ représente la transposée de la matrice des cofacteurs. De la relation précédente, on en déduit donc que

■ ***Définition***

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(pI_n - A)^{-1}\right]. \tag{1.68}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \tag{1.69}$$

Alors

$$(pI_n - A)^{-1} = \frac{1}{(p+1)(p+2)^2}\begin{bmatrix} (p+2)^2 & p+2 & 2p+5 \\ 0 & (p+1)(p+2) & (p+1) \\ 0 & 0 & (p+2)(p+1) \end{bmatrix}, \tag{1.70}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & -\frac{1}{p+2}+\frac{1}{p+1} & -\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{3}{p+2}+\frac{3}{p+1} \\ 0 & \frac{1}{p+2} & \frac{1}{(p+2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{p+2} \end{bmatrix}. \tag{1.71}$$

D'où par identification des transformées de Laplace sous forme éléments simples,

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} e^{-t} & -e^{-2t}+e^{-t} & -(t+3)e^{-2t}+3e^{-t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}. \tag{1.72}$$

Exercice
Calculer la matrice de transition du système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u. \tag{1.73}$$

Méthode reposant sur le théorème de Cayley-Hamilton

■ ***Théorème 1 (Cayley-Hamilton)***

Toute matrice carrée est solution de son polynôme caractéristique.
En d'autres termes, si $\Delta_A(\lambda)$ est le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ c'est-à-dire

$$\Delta_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0, \tag{1.74}$$

alors

$$\Delta_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n = 0^{n\times n}. \tag{1.75}$$

A partir de cette expression, on peut voir que

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 I_n. \tag{1.76}$$

Il est donc clair que toute puissance de la matrice A supérieure ou égale à n pourra s'écrire de façon unique en fonction de I_n, $A, \cdots, A^{n-1}$:

$$A^{n+k} = F_k\left(A^{n-1}, \cdots, A, I_n\right) = f_k^{(0)} I_n + f_k^{(1)} A + \cdots + f_k^{(n-1)} A^{n-1}, \qquad \forall k \geq 0. \tag{1.77}$$

Ainsi,

$$\phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = I_n + A(t-t_0) + \frac{A^2(t-t_0)^2}{2\,!} + \cdots + \frac{A^k(t-t_0)^k}{k\,!} + \cdots \tag{1.78}$$

prend la forme

$$e^{A(t-t_0)} = \alpha_0(t-t_0)I_n + \alpha_1(t-t_0)A(t-t_0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t-t_0)A^{n-1}. \tag{1.79}$$

Les coefficients $\alpha_i(t-t_0), i \in \{0, \cdots, n-1\}$ sont obtenus à partir des relations

$$e^{\lambda_i t} = \alpha_0(t)I_n + \alpha_1(t)\lambda_i + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}, \tag{1.80}$$

où $\lambda_i, i \in \{0, \cdots, n-1\}$ sont les valeurs propres **distinctes** de la matrice A. On obtient ainsi n équations algébriques linéaires déterminant de façon unique les coefficients $\alpha_i(t)$:

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1.81}$$

Dans ce cas il suffit d'inverser la matrice de Van Der Monde.

Si les valeurs propres **ne sont pas toutes simples**, il faut obtenir des équations supplémentaires linéairement indépendantes de (1.80). Pour ce faire, il faut dériver cette équation par rapport à λ_i :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda_i}\left(e^{\lambda_i t}\right) = te^{\lambda_i t} = \alpha_1(t) + 2\alpha_2(t)\lambda_i + \cdots + (n-1)\alpha_{n-1}(t)\lambda_i^{n-2}. \tag{1.82}$$

Alors par exemple pour une matrice A ayant λ_1 comme valeur propre simple et λ_2 comme valeur propre double :

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ te^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 0 & 1 & 2\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \end{pmatrix}. \tag{1.83}$$

Simplification : cas A diagonalisable

Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}. \tag{1.84}$$

Or l'expression en série de l'exponentielle fait apparaître les puissances de A :

$$\forall k > 0, \qquad A^k = PD^kP^{-1}, \tag{1.85}$$

soit

$$\exp(At) = P\exp(Dt)P^-1 = P \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & \ldots & \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & \exp(\lambda_n t) \end{bmatrix} P^{-1} \tag{1.86}$$

Simplification : cas A matrice de Jordan
De façon plus générale, les matrices peuvent se mettre sous la forme de Jordan, c'est-à-dire se mettre sous forme diagonale par blocs, dont les blocs sur la diagonale sont des matrices de Jordan :

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ & & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{1.87}$$

Ici on ne présentera que l'exponentielle pour ce bloc J_λ. En remarquant que

$$J_\lambda = \lambda I + N, \tag{1.88}$$

avec N une matrice nilpotente, on a

$$\exp(J_\lambda t) = \exp(\lambda t)\exp(Nt) = \exp(\lambda t)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{N^k t^k}{k!}. \tag{1.89}$$

Exemple

$$J_{-3} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \tag{1.90}$$

Alors

$$\exp(J_{-3}t) = e^{(-3t)}\begin{bmatrix} e^{(-3t)} & te^{(-3t)} & \frac{t^2}{2}e^{(-3t)} \\ 0 & e^{(-3t)} & te^{(-3t)} \\ 0 & 0 & e^{(-3t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.91}$$

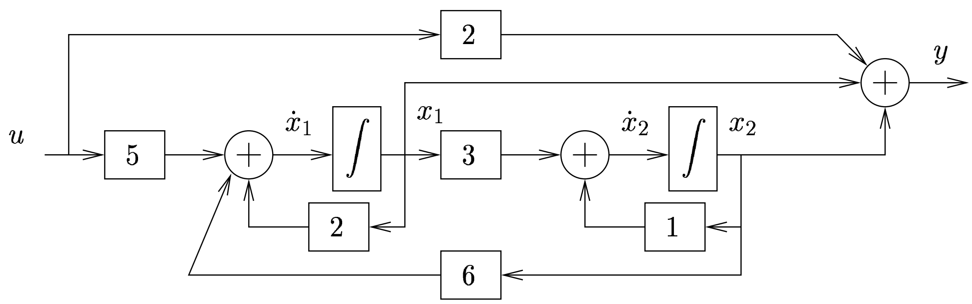
1.3 Réalisation d'un schéma de simulation

Afin de mieux comprendre un système, il est possible de réaliser un schéma de simulation de la représentation d'état. Il existe une infinité de représentation d'état liée à un même système, due au choix de l'état considéré. A chacune de ces représentations correspond un schéma de simulation. En revanche, il existe certains points communs entre ceux-ci. Le reste de ce paragraphe décrit la méthodologie pour construire un schéma de simulation.
La première étape est de déterminer le nombre de blocs intégrateur qu'il faut utiliser. Une représentation minimale utilise un nombre d'intégrateurs égal à l'ordre du système (c'est-à-dire la dimension du vecteur d'état). Il faut disposer à la sortie de chaque intégrateur une variable d'état. Avant chaque intégrateur se situe la dérivée de chacune des variables d'état, qui est une somme pondérée par les coefficients de A et B des variables d'état et des entrées. Pour finaliser le schéma de simulation, il faut rajouter une somme pondérée par C et D des variables d'état et des entrées pour obtenir la sortie y selon l'équation d'observation.
Cette démarche est illustrée par l'exemple suivant :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{1.92}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{1.93}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x + [2]u. \tag{1.94}$$


2
y
u
5
$\dot{x}_1$
$\int$
x_1
3
$\dot{x}_2$
$\int$
x_2
2
1
6

Chapitre 2

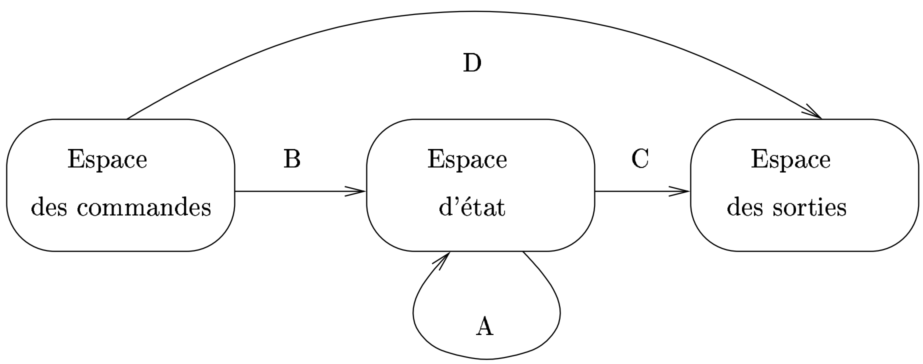
Commandabilité et observabilité des systèmes linéaires invariants

2.1 Introduction

Considérons le système linéaire invariant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^r$ et $x(0) = x_0$.
Les quatres matrices A, B, C et D représentent des transformations sur l'espace d'état, l'espace des commandes et l'espace des sorties. La figure suivante donne les relations entre ces espaces :



On peut alors se poser deux questions importantes sur l'évolution de l'état et donc sur le lien entre ces espaces au travers des matrices A, B, C et D.

– Peut-on déterminer une commande admissible transférant le système d'un état donné à un autre ? La notion sous-jacente à cette question est la notion de **commandabilité** (gouvernabilité, contrôlabilité). D'après notre schéma ceci concerne la matrice A et l'action par B sur l'espace d'état.
– Peut-on déterminer l'état initial à partir de l'observation des sorties ? La notion sous-jacente à cette question est la notion d'**observabilité**. D'après notre schéma cette propriété concerne les matrices A et C.

Dans un problème de commande, le but est de faire suivre aux états ou aux sorties du système une loi prédéfinie (un comportement désiré). Il faut donc s'assurer que cela est possible, c'est la notion de commandabilité.

D'autre part, il est souvent nécessaire de reconstruire l'état d'un système à partir des mesures disponibles pour les sorties. La notion d'observabilité est alors nécessaire pour s'assurer que la reconstruction de l'état est possible.

2.2 Commandabilité

Notons par $\psi(t, x_0, u)$ la solution de (2.1), c'est-à-dire,

$$x(t) = \psi(t, x_0, u) = \exp(At)x_0 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))Bu(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{2.2}$$

■ ***Définition***

On dira qu'un état $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est accessible à partir de x_0 s'il existe un temps $T > 0$ et une entrée u tels que

$$x(T) = \psi(T, x_0, u) = x_1. \tag{2.3}$$

Notons par $\mathcal{A}(T, x_0)$ l'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps T.

■ ***Définition***

Un système est **commandable***, si et seulement si :*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall T > 0, \quad \mathcal{A}(T, x_0) = \mathbb{R}^n. \tag{2.4}$$

On a alors la proposition suivante :

■ ***Proposition***

Une condition <u>nécessaire et suffi sante</u> pour que le système soit commandable est que l'ensemble des états possibles $\mathbb{R}^n$ soit accessible à partir de l'origine :

$$\forall T > 0, \quad \mathcal{A}(T, 0) = \mathcal{A}_0 = \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Cette proposition montre que l'on peut ramener l'étude de l'accessibilité à partir d'un état x_0 quelconque à l'étude de l'accessibilité à partir de l'origine.

preuve : $\underline{\Rightarrow}$ si le système est commandable, alors en particulier pour $x_0 = 0$, tout l'espace d'état est accessible. $\underline{\Leftarrow}$ si $\mathcal{A}(T, 0) = \mathbb{R}^n$, en particulier $\forall x_1, \exists u$, tel que $z = x_1 - \phi(T)x_0 = \psi(T, 0, u)$ soit accessible. Alors $\psi(T, x_0, u) = \underbrace{\psi(T, x_0, 0)}_{\text{régime libre}} + \underbrace{\psi(T, 0, u)}_{\text{régime forcé}} = \phi(T)x_0 + x_1 - \phi(T)x_0 = x_1$.

■ ***Définition***

On défi nit le sous-espace vectoriel $\langle A|B\rangle$ de $\mathbb{R}^n$ par la relation

$$\begin{aligned} \langle A|B\rangle \quad &:= B + AB + \cdots + A^{n-1}B \\ &\left\{v \in \mathbb{R}^n | v = Bw_0 + ABw_1 + \cdots + A^{n-1}Bw_{n-1}, w_i \in \mathbb{R}^m\right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\langle A|B\rangle$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par A et les colonnes de B.

■ ***Lemme***

Le sous-espace $\langle A|B\rangle$ est A-invariant.

On peut alors établir le résultat suivant

■ ***Théorème***

> *Pour tout système de la forme (2.1), on a $\forall T > 0$, l'égalité*
>
> $$\mathcal{A}(T, 0) = \mathcal{A}_0 = \langle A|B\rangle \,, \tag{2.7}$$
>
> *où $\mathcal{A}_0$ est l'ensemble des états accessibles à partir de zéro.*

Nous allons maintenant caractériser la dimension de $\mathcal{A}_0$ à partir de A et B.

■ ***Définition***

> *On appelle* **matrice de commandabilité** $\mathcal{C}(A, B)$ *la matrice défi nie par*
>
> $$\mathcal{C}(A, B) = \left[B|AB|\cdots|A^{n-1}B\right]. \tag{2.8}$$

On a alors le résultat suivant

■ ***Proposition***

> *La dimension de l'espace $\mathcal{A}_0$ est donnée par*
>
> $$dim\mathcal{A}_0 = rang\mathcal{C}(A, B). \tag{2.9}$$

L'espace $\mathcal{A}_0$ est le sous-espace vectoriel d'accessibilité engendré par les colonnes de la matrice de commandabilité.

■ ***Proposition***

> *Le système (2.1) est* **commandable si et seulement si** *le rang de sa matrice de commandabilite est égal à la dimension de l'espace d'état, c'est-à-dire,*
>
> $$dim\mathcal{C}(A, B) = n. \tag{2.10}$$

preuve

$\Rightarrow$ Supposons que la condition de rang ne soit plus valable. Il existe alors un $\rho \neq 0$, tel que

$$\rho A^i B = 0, \quad \forall i \geq 0. \tag{2.11}$$

Alors tout élément accessible à partir de 0 est de la forme

$$x(T) = \int_0^T \exp(A(T-\tau))Bu(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2.12}$$

alors

$$\rho x(T) = \int_0^T \sum_{k=0}^{n-1} \rho A^k B \alpha_k (T-\tau) u(\tau)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{2.13}$$

Donc $\mathcal{A}_0 \neq \mathbb{R}^n$.

$\Leftarrow$ Supposons que le système ne soit pas commandable, alors il existe $\rho \neq 0$ tel que $\rho x = 0, \ \forall x \in \mathcal{A}_0$. En particulier, la commande

$$u(t) = B' \exp(A'(t-\tau))\rho' \tag{2.14}$$

mène à l'équation :

$$\rho x = 0 = \int_0^t \rho \exp(A(t-\tau))BB' \exp(A(t-\tau))'\rho'\mathrm{d}\tau = \int_0^t \|\rho \exp(A(t-\tau))B\|^2 \mathrm{d}\tau \tag{2.15}$$

Donc

$$\forall \tau \in [0,t],\ \rho \exp(A(t-\tau))B = 0. \tag{2.16}$$

Soit en $\tau = t$, $\rho B = 0$. En dérivant (2.16) et en prenant $\tau = t$, on obtient $\rho A^i B = 0, \quad \forall i \geq 0$.

Exercice
Étudier la commandabilité des systèmes suivants •

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2, \\ \dot{x}_2 & = & 2x_1 - 3x_2 + u, \\ y & = & x_1 + x_2. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -2x_2 + u, \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - 3x_2 + u, \\ y & = & x_2. \end{array} \right. \tag{2.18}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 - 2x_3 - u_2, \\ \dot{x}_2 & = & 3x_1 - 4x_2 + +5x_3 + 2u_1 - 3u_2, \\ \dot{x}_3 & = & -6x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 4u_1 - 3u_2. \end{array} \right. \tag{2.19}$$

■ ***Définition***

> *Un changement de coordonnées (ou changement d'état) de la forme*
>
> $$z = Tx, \tag{2.20}$$
>
> *où $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, est dit* **régulier** *si la matrice T est inversible.*

■ ***Proposition***

> *La propriété de commandabilité pour le système (2.1) est invariante par tout changement d'état régulier.*

En conséquence, si le système (2.1) est commandable, il préserve cette propriété par tout changement d'état régulier.

■ ***Proposition***

> *Si le système (2.1) n'est pas commandable, on peut toujours décomposer l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ sous la forme*
>
> $$\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{E}, \tag{2.21}$$
>
> *où $\mathcal{E}$ désigne un supplémentaire quelconque de $\mathcal{A}_0$. De plus $\mathcal{E}$ n'est affecté par aucune des entrées du système.*

Une décomposition de l'espace d'état de la forme (2.21) est appelé **décomposition de Kalman**.

Exercice
Considérons le système linéaire suivant

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} u. \tag{2.22}$$

1. Etudier la commandabilité de ce système.
2. Dans le cas où ce système n'est pas commandable, effectuer la décomposition de Kalman de l'espace d'état.
3. Déduire de cette décomposition une nouvelle base de $\mathbb{R}^n$ liée à la décomposition de Kalman et écrire le système dans cette nouvelle base.

2.3 Observabilité

En pratique, il n'est généralement pas possible de mesurer complètement l'état du système. Or, pour stabiliser les systèmes linéaires, on considère souvent des bouclages de la forme

$$u = Fx. \tag{2.23}$$

On peut remarquer que ce type de bouclage nécessite la connaissance de tout l'état (**i.e.**, la mesure de tout l'état). On est alors conduit à chercher les conditions qui permettent de calculer le vecteur d'état $x(t)$ pour $t \in [0, T]$ à partir des données «mesurables» du système, c'est-à-dire les matrices A, B, C, l'entrée $u(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$ et la réponse fournie par la sortie $y(t)$ sur l'intervalle $[0, T]$.
Une manière possible de formaliser ce qui vient d'être dit est de procéder comme suit

■ ***Définition***

> *Le système (2.1) est* **observable** *si pour tout $T > 0$, il existe une fonctionnelle Ω telle que*
>
> $$\Omega(T, u_{[0,T]}, y_{[0,T]}) = x(T), \quad T > 0. \tag{2.24}$$
>
> *où $u_{[0,T]}$ et $y_{[0,T]}$ désignent respectivement l'ensemble des valeurs de u et y sur l'intervalle $[0, T]$.*

Comme $x(t)$ est une fonction continue, on a $\lim_{t\to 0^+} x(t) = x_0$. Ainsi, un système observable permet de retrouver un voisinage de l'état initial à partir de la connaissance des entrées et des sorties sur un intervalle de temps quelconque.
Supposons que le système (2.1) soit initialisé en $x(0) = x_1$ puis en $x(0) = x_2$ en lui appliquant dans les deux cas une entrée identique. A l'état initial x_1 (resp. x_2) va correspondre une trajectoire de la sortie $y_1(t)$ (resp. $y_2(t)$).

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C\left[\exp(At)x_1 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))Bu(\tau)\mathrm{d}\tau\right], \\ y_2(t) &= C\left[\exp(At)x_2 + \int_0^t \exp(A(t-\tau))Bu(\tau)\mathrm{d}\tau\right] \end{aligned} \tag{2.25}$$

Ainsi,

$$y_1(t) - y_2(t) = C\exp(At)\big[x_1 - x_2\big]. \tag{2.26}$$

En conséquence, la différence entre l'évolution des sorties du système, auquel on applique la même entrée, ne dépend que de l'initialisation du système. La relation (2.26) met en lumière l'importance de la matrice de transition A et son rapport avec la matrice de sortie C.

■ ***Définition***

> *Deux états initiaux $x(0) = x_1$ et $x(0) = x_2$, sont dits indistinguables si pour tout $t > 0$, les sorties correspondantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont identiques quelle que soit l'entrée u du système.*

Le lien entre les états indistinguables et l'observabilité est donné par la proposition suivante :

■ ***Proposition***

> *Si le système (2.1) a deux états initiaux indistinguables alors il n'est pas observable.*

Comme pour la commandabilité, nous allons donner une caractérisation algébrique de l'observabilité.

- ***Lemme***

> *Soient x_1 et x_2 deux états indistinguables du système linéaire (2.1), alors*
> $$x_1 - x_2 \in \bigcap_{t \geq 0} \mathit{ker}\big[C \exp(At)\big] \tag{2.27}$$

- ***Lemme***

> *On a l'égalité*
> $$\bigcap_{t \geq 0} \mathit{ker}\big[C \exp(At)\big] = \bigcap_{k=0}^{n-1} \mathit{ker} CA^k \tag{2.28}$$

- ***Lemme***

> *Si deux états initiaux x_1 et x_2 vérifient*
> $$x_1 - x_2 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \mathit{ker} CA^k \tag{2.29}$$
> *ils sont indistinguables pour le système (2.1) et le système n'est pas observable.*

- ***Proposition***

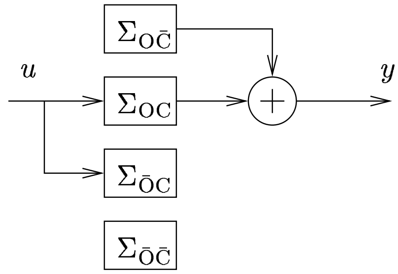
> *Le système (2.1) est observable si et seulement si la matrice*
> $$\mathcal{O}(C, A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$
> *est de rang égal à n. On désignera par la suite $\mathcal{O}(C, A)$ par* **matrice d'observabilité**.

Exercice

Étudier l'observabilité du système
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{2.31}$$
avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

Si l'on considère une représentation d'état quelconque d'un système linéaire S, on peut toujours la décomposer en quatre parties selon la figure suivante :

$\Sigma_{O\bar{C}}$	Partie observable et non-commandable
Σ_{OC}	Partie observable et commandable
$\Sigma_{\bar{O}C}$	Partie non-observable et commandable
$\Sigma_{\bar{O}\bar{C}}$	Partie non-observable et non-commandable



■ ***Remarque***

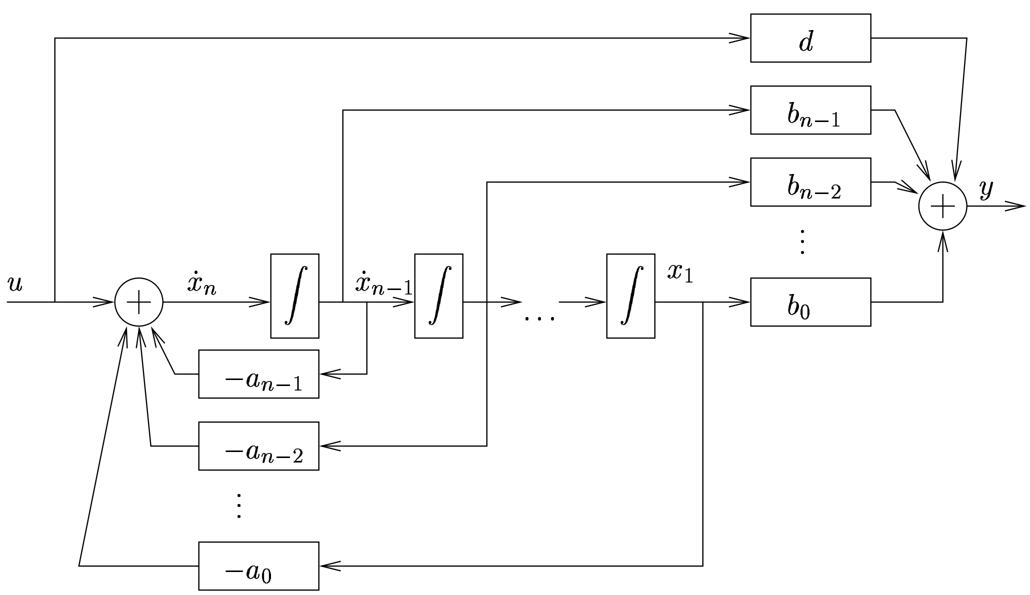
> *Lorsque le système (2.1) est commandable (resp. observable), on dit alors souvent que la paire (A, B) (resp. (C, A)) est commandable (resp. observable).*

2.4 Liens avec les formes canoniques de commandabilité et d'observabilité

2.4.1 Commandabilité et forme canonique de commandabilité

Rappelons que la forme canonique de commandabilité s'écrit pour un système linéaire invariant mono-entrée, mono-sortie

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A_c} x + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_c} u, \quad \text{(cas où } b_n = 0\text{)} \\ y &= \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix} x. \end{aligned} \tag{2.33}$$



La matrice de commandabilité prend alors la forme

$$\mathcal{C}(A_c, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & \\ \vdots & \iddots & \iddots & * & \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & -a_{n-1} & & & \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Ainsi le rang$\mathcal{C}(A_c, B_c) = n$ et un système pouvant se mettre sous la forme canonique de commandabilité est toujours commandable.

2.4.2 Passage à la forme commandable d'un système commandable

Il a déjà été vu qu'un changement de base **régulier** conserve la propriété de commandabilité d'un système commandable. Ce paragraphe donne la forme du changement de base régulier T qui permet de mettre tout système $\dot{x} = Ax + Bu$ sous forme canonique de commandabilité :

$$z = Tx, \tag{2.35}$$

telle que la dynamique déduite de (2.1) par cette transformation s'écrive sous la forme

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}}_{A_c = TAT^{-1}} z + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_c = TB} u, \qquad z \in \mathbb{R}^n, \tag{2.36}$$

les « $*$ » représentant des termes pouvant être non nuls.

Ainsi les systèmes pouvant se mettre sous la forme (2.36) sont nécessairement des systèmes commandables et la matrice de commandabilité

$$\mathcal{C}(A, B) = \left[B \middle| AB \middle| \cdots \middle| A^{n-1}B\right], \tag{2.37}$$

de dimension $n \times n$, est inversible puisque rang$\mathcal{C}(A, B) = n$ (propriété de commandabilité). S'il existe une matrice de changement de base $z = Tx$ telle que

$$A_c = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad B_c = TB = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Alors la matrice de commandabilité $\mathcal{C}(A_c, B_c)$ prend la forme

$$\mathcal{C}(A_c, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & * \\ \vdots & 0 & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & * & & \vdots \\ 1 & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Soit

$$\mathcal{C}(A_c, B_c) = T\mathcal{C}(A, B). \tag{2.40}$$

■ ***Propriété***

> *Ainsi, puisque* $\mathcal{C}(A, B)$ *est inversible*
>
> $$T = \mathcal{C}(A_c, B_c)\mathcal{C}(A, B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & * \\ \vdots & 0 & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & * & & \vdots \\ 1 & * & \dots & \dots & * \end{pmatrix} \mathcal{C}(A, B)^{-1}. \tag{2.41}$$

2.4.3 Forme canonique de Brunovski

La forme compagnon se réécrit également sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_2, \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n, \\ \dot{z}_n & = & -a_0 z_1 - a_1 z_2 - \cdots - a_{n-1} z_n + u. \end{array} \right. \tag{2.42}$$

Si l'on pose maintenant $\dot{z}_n = v$, alors la forme compagnon prend la forme particulière

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_2, \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n, \\ \dot{z}_n & = & v. \end{array} \right. \tag{2.43}$$

appelée **forme canonique de Brunovski**. Poser $\dot{z} = v$ revient à poser

$$v = -a_0 z_1 - a_1 z_2 - \cdots - a_{n-1} z_n. \tag{2.44}$$

Autrement dit, le bouclage

$$u = a^T z + v, \qquad \text{où } a = (a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})^T, \tag{2.45}$$

soit, en tenant compte de la transformation d'état (2.35)

$$u = Fx + v, \qquad \text{avec } F := a^T T, \tag{2.46}$$

conduit à la forme canonique de Brunovski.

Exercice

On considère la dynamique

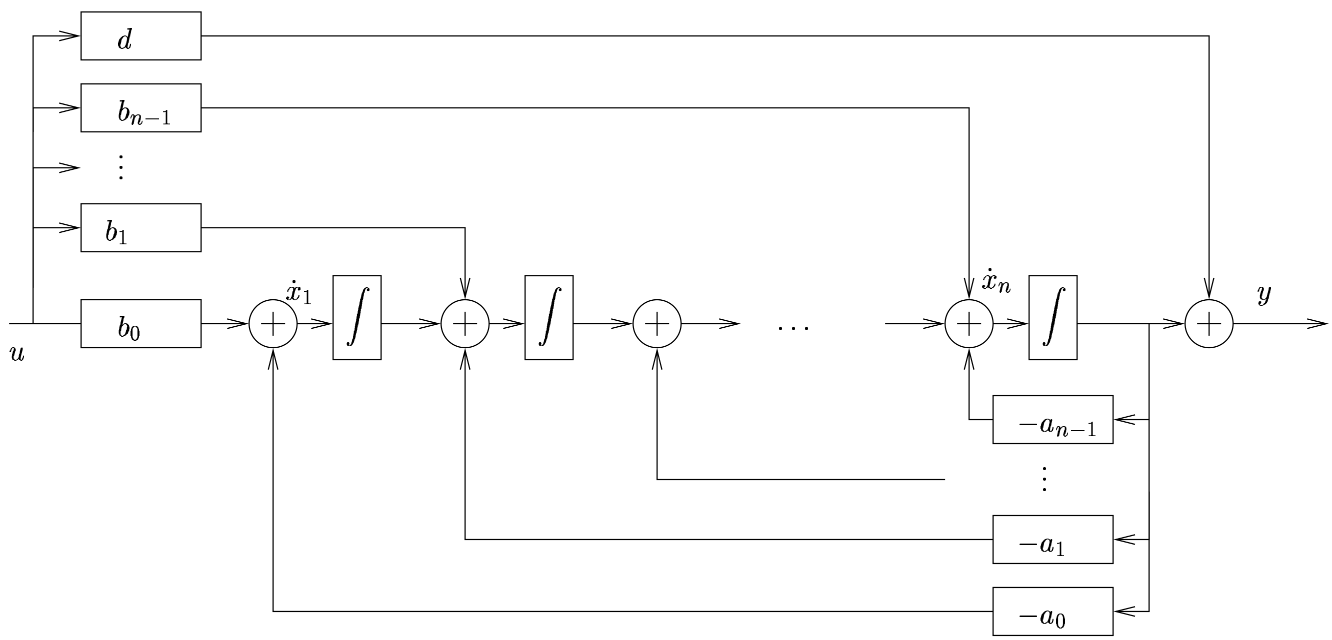
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{2.47}$$

1. Montrer que cette dynamique est commandable.
2. Mettre cette dynamique sous forme compagnon à l'aide d'un changement de base que l'on précisera.

2.4.4 Observabilité et forme canonique d'observabilité

Rappelons que la forme canonique d'observabilité s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} u, \quad \text{(cas où } b_n = 0\text{)} \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} x. \end{aligned} \tag{2.48}$$



La matrice de d'observabilité prend alors la forme

$$\mathcal{O}(C, A) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & \iddots & -a_1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \\ 0 & 1 & & * & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}. \tag{2.49}$$

Ainsi le rang de $\mathcal{O}(C, A) = n$ et un système pouvant se mettre sous la forme canonique de d'observabilité est toujours observable.

2.4.5 Réalisation minimale

■ ***Définition***

> *Une représentation d'état de la forme (2.1) est une réalisation de $H(p)$ si*
>
> $$H(p) = C(pI - A)^{-1}B + D. \tag{2.50}$$

Il existe en fait une infinité de réalisation de $H(p)$. En effet, par un changement de coordonnée régulier de la forme

$$z = Tx, \tag{2.51}$$

nous obtenons une nouvelle représentation d'état

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{B}u, \\ y = \tilde{C}z + \tilde{D}u. & \end{aligned} \tag{2.52}$$

avec $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$ et $\tilde{D} = D$, ayant pour fonction de transfert $\tilde{H(p)} = H(p)$.
Les équations d'état

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& -x_1 + u, \\ y &=& x_1. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& -x_1 + x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &=& -2x_2, \\ y &=& x_1 + x_2. \end{array} \right. \tag{2.53}$$

décrivent une réalisation de la même fonction de transfert $H(p) = \dfrac{1}{1+p}$.

■ ***Définition***

> *Désignons par* **ordre** *de $H(p)$ le degré du dénominateur de $H(p)$, c'est-à-dire le degré de $\det(pI - A)$ (le polynôme caractéristique). Une réalisation d'une fonction de transfert $H(p)$ est* **minimale** *s'il existe aucune réalisation d'ordre inférieur dont la fonction de tranfert est $H(p)$.*

Le concept de minimalité est directement relié aux concepts de commandabilité et d'observabilité par le théorème suivant

■ ***Théorème***

> *Une réalisation est* **minimale** *si et seulement si elle est commandable et observable.*

Considérons pour simplifier le cas d'un système mono-entrée, mono-sortie dont la fonction de transfert est $H(p)$. Supposons maintenant que nous ayons compensation d'un pôle par un zéro, alors il est clair que la réalisation que nous avons considérée n'est pas minimale et d'après le théorème précédent cette réalisation est soit non-commandable, soit non-observable, soit les deux à la fois.

Exercice

Considérons le système linéaire réprésenté par sa fonction de transfert

$$H(p) = \frac{p+3}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}. \tag{2.54}$$

1. Étudier la commandabilité et l'observabilité d'une réalisation du système.

2. Donner une réalisation minimale de la fonction de transfert $H(p)$.

Chapitre 3

Stabilité des systèmes linéaires invariants

Considérons le système linéaire invariant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^r$ et $x(0) = x_0$. Il existe plusieurs définitions de stabilité d'un système. Il sera établi que pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, ces différentes définitions sont équivalentes.

3.1 Stabilité du système non commandé ($u(t) = 0$)

Nous nous intéressons à la stabilité du système

$$\dot{x} = Ax. \tag{3.2}$$

■ ***Définition***

> *Nous dirons que le système (3.2) est* **stable** *si pour toute condition initiale $x(0)$, l'état $x(t)$ est borné pour tout $t > 0$. Cette stabilité est connue sous le nom de* **stabilité interne** *dans la littérature, comme elle ne fait pas intervenir dans sa défi nition d'entrée u. Nous dirons que (3.2) est* **asymptotiquement stable** *s'il est stable et si de plus $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.*

Nous allons voir que la stabilité du système (3.2) est lié aux propriétés de la matrice de transition $\phi(t) = \exp(At)$. En effet nous avons montrer lors des chapitres précédents que la transformée de Laplace de $\phi(t)$, notée $\Phi(p)$, était donnée par

$$\Phi(p) = (pI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(pI - A)}{\det(pI - A)}, \tag{3.3}$$

où $\Delta_A(p) := \det(pI - A)$ représente le polynôme caractéristique de la matrice A. Supposons que la matrice A aie q valeurs propres différentes $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$ (éventuellement complexes) de multiplicité $\beta_1, \cdots, \beta_q$ respectivement, c'est-à-dire :

$$\Delta_A(p) = (p - \lambda_1)^{\beta_1} \cdots (p - \lambda_q)^{\beta_q}, \qquad \text{avec } \sum_{j=1}^{q} \beta_j = n. \tag{3.4}$$

Le développement de $\Phi(p)$ en fractions rationnelles s'écrit alors

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{A_{ij}}{(p - \lambda_i)^j}, \tag{3.5}$$

où les A_{ij} sont des matrices constantes de dimension $n \times n$. Pour obtenir $\phi(t)$, il suffit de passer à la transformée de Laplace inverse

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(pI - A)^{-1}\right] = \sum_{i=1}^{q} \exp(\lambda_i t) A_i(t), \quad \text{avec } A_i(t) = \sum_{j=1}^{\beta_i} A_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}. \tag{3.6}$$

■ ***Définition***

> *Le terme $\exp(\lambda_i t)$ apparaissant dans (3.6) est désigné par* **mode** *(ou* **mode propre** *associé à la valeur propre λ_i.*

■ ***Remarque***

> *Il peut arriver que $A_{ij} = A_{ij+1} = \cdots = A_{i\beta_i}, j \geq 1$, pour une ou plusieurs racines λ_i. Dans ce cas la matrice A apparaît comme étant celle d'un système d'ordre moins élevé, c'est-à-dire, celui ayant une équation caractéristique d'ordre plus faible. Cette situation survient quand le polynôme minimal est de degré plus faible que le polynôme caractéristique.*

La solution de (3.2) s'écrivant

$$x(t) = \phi(t)x(0), \tag{3.7}$$

les composantes du vecteur d'état sont alors données par

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \phi_{ij}(t) x_j(0). \tag{3.8}$$

■ ***Théorème***

> *Concernant la stabilité de (3.2) nous avons le résultat suivant*
>
> – *Si toutes le valeurs propres de A sont à partie réelle négative (c'est-à-dire, Re$(\lambda_i) < 0, \forall i$) alors*
>
> $$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0, \qquad \textit{(stabilité asymptotique)}. \tag{3.9}$$
>
> – *S'il existe une valeur propre de A à partie réelle positive (c'est-à-dire, Re$(\lambda_i) > 0$ pour un certain i, alors au moins une composante de $x(t)$ tend vers l'infini quand $t \to +\infty$ (système instable).*
>
> – *Si toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle non-positive (c'est-à-dire, Re$(\lambda_i) \leq 0, \forall i$) et*
>
>   *(a) toutes les valeurs propres ayant une partie réelle nulles sont simples, alors chaque composante de $x(t)$ reste bornée mais ne tend pas nécessairement vers 0 quand $t \to +\infty$ (sauf si les valeurs initiales $x_j(0)$ correspondant à chaque constante ϕ_{ij} sont nulles).*
>
>   *(b) si toutes les valeurs propres à partie réelle nulle sont multiples alors*
>
> $$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = +\infty, \quad \forall i. \tag{3.10}$$

3.2 Stabilité du système commandé

Considérons le système commandé

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \tag{3.11}$$

■ *Définition*

Le système (3.11) est **stable au sens Entrée Bornée Sortie Bornée [EBSB]** *si et seulement si pour toute condition initiale* $x(0) \in \mathbb{R}^n$ *et toute entrée* $u(t)$ *uniformément bornée, c'est-à-dire,*

$$\max_{t \in [0,+\infty[} |u_i(t)| < +\infty, \qquad i = 1, \cdots, m. \tag{3.12}$$

$x(t)$ *est borné.*

■ *Proposition*

Concernant la stabilité EBSB, nous avons le résultat suivant

- *Une condition nécessaire et suffisante pour que (3.11) soit stable est que l'influence de la condition initiale tende vers* 0 *quand* $t \to +\infty$ *est que le système non-commandé* $\dot{x} = Ax$ *soit asymptotiquement stable.*
- *Une condition nécessaire et suffisante pour que (3.11) soit stable est que* $\dot{x} = Ax$ *soit stable et qu'aucune entrée n'influence les modes du système liés à une valeur propre à partie réelle nulle.*

■ *Remarque*

Pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, toutes les définitions de stabilité sont équivalentes.

Chapitre 4

Stabilisation et poursuite de trajectoire des systèmes linéaires invariants

On considère dans ce chapitre le cas d'une dynamique linéaire à une seule entrée

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{4.1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$.

4.1 Stabilisation

4.1.1 Cas où le système est commandable

Considérons un système linéaire de la forme (4.1) avec la paire (A, B) commandable. Nous avons montré lors du Chapitre III que la transformation

$$z = Tx, \tag{4.2}$$

où la matrice de changement de base T est donnée par (2.41), transforme système (4.1) sous la forme canonique de commandabilité (forme compagnon)

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A_c} z + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_c} u, \qquad z \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

■ ***Propriété***

> *Une propriété importante de cette forme compagnon est que le polynôme caractéristique de cette matrice A_c est donné par les coeffi cients de sa dernière ligne :*
>
> $$P_{A_c}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0. \tag{4.4}$$

En un bouclage de la forme (2.46), (4.3) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_2, \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n, \\ \dot{z}_n & = & v. \end{array} \right. \qquad \text{(Forme canonique de Brunovski)} \tag{4.5}$$

En tenant compte de (4.2), le bouclage (2.46) peut se réécrire

$$u = FT^{-1}x + v. \tag{4.6}$$

Ainsi le système (4.1) prend la forme

$$\begin{cases} \dot{z} & = & T(A+BF)T^{-1}z + TBv = \hat{A}z + \hat{B}v, \\ y & = & CT^{-1}z. \end{cases} \tag{4.7}$$

■ ***Proposition***

> *Soit $\hat{A} = T(A+BF)T^{-1}$ alors Sp$(\hat{A})$ = Sp$(A+BF)$.*

Posons maintenant

$$v = -\gamma_0 z_1 - \gamma_1 z_2 - \cdots - \gamma_{n-1} z_n = \Gamma z. \tag{4.8}$$

La forme canonique de Brunovski prend alors la forme

$$\dot{z} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\gamma_0 & -\gamma_1 & \cdots & \cdots & -\gamma_{n-1} \end{pmatrix}}_{\hat{A}} z + \hat{B}v \tag{4.9}$$

et $\Delta_{\hat{A}} = \det(pI - \hat{A}) = p^n + \gamma_{n-1}p^{n-1} + \cdots + \gamma_1 p + \gamma_0$ (polynôme caractéristique de la matrice $\hat{A}$). En choisissant $\gamma_{n-1}, \cdots, \gamma_0$ convenablement, on peut placer les valeurs propres de A de façon arbitraire.

■ ***Théorème***

> *Une condition nécessaire et suffi sante pour que le système (4.1) soit stabilisable de façon arbitraire est qu'il soit commandable.*

4.1.2 Cas où le système n'est pas commandable

Dans le cas où le système (4.1) n'est pas commandable, c'est-à-dire, rang$\mathcal{C}(A,B) = N < n$, l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ admet la décomposition suivante

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{E}, \qquad \text{avec } \dim\mathcal{A}_0 = N \text{ et } \dim\mathcal{E} = n - N. \tag{4.10}$$

La décomposition de $\mathbb{R}^n$ permet d'obtenir la transformation de coordonnées

$$\omega = \begin{pmatrix} \eta \\ \hline \zeta \end{pmatrix} = T_1 x, \qquad \text{avec } \dim\eta = N \text{ et } \dim\zeta = n - N. \tag{4.11}$$

transformant le système (4.1) sous la forme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \hline \dot{\zeta} \end{pmatrix}}_{\dot{\omega}} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}_1^1 & \tilde{A}_1^2 \\ \hline 0_{n-N,N} & \tilde{A}_2^2 \end{array}\right)}_{T_1 A T_1^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \eta \\ \hline \zeta \end{pmatrix}}_{\omega} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline 0_{n-N} \end{pmatrix}}_{T_1 B}. \tag{4.12}$$

En vertu de la Proposition sur le spectre, nous avons $\mathrm{Sp}(T_1AT_1^{-1})$ = $\mathrm{Sp}(A)$. Réécrivons le système ci-dessus sous la forme

$$\begin{array}{rcl}\dot{\eta} & = & \tilde{A}_1^1\eta + \tilde{A}_1^2\zeta + \tilde{B}_1 u,\\ \dot{\zeta} & = & \tilde{A}_2^2\zeta.\end{array} \tag{4.13}$$

avec la paire $(\tilde{A}, \tilde{B})$ commandable.

On remarque que l'entrée u n'affecte pas la dynamique de ζ dans (4.13). On en déduit immédiatement que si $\tilde{A}_2^2$ n'est pas stable alors un système linéaire non-commandable ne peut être stabilisé.

Supposons maintenant que $\tilde{A}_2^2$ soit stable, alors on considère le système restreint à la partie commandable

$$\dot{\eta} = \tilde{A}_1^1\eta + \tilde{B}_1 u, \tag{4.14}$$

Les différentes étapes permettant alors de stabiliser le système (4.1) sont les suivantes :

1. On forme la matrice de commandabilité
$$\mathcal{C}(\tilde{A}_1^1, \tilde{B}_1) = \left[\tilde{B}_1 | \cdots | \left(\tilde{A}_1^1\right)^{N-1}\tilde{B}_1\right]. \tag{4.15}$$
2. On calcul la dernière ligne κ^T de $\mathcal{C}(\tilde{A}_1^1, \tilde{B}_1)^{-1}$.
3. On forme la matrice $\tilde{T}$:
$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \kappa^T \\ \kappa^T\tilde{A}_1^1 \\ \vdots \\ \kappa^T\left(\tilde{A}_1^1\right)^{N-1}\end{pmatrix} \tag{4.16}$$
4. On transforme le système (4.13) par le changement de base T_2 donné par
$$z = T_2\omega = T_2\begin{pmatrix}\eta \\ \hline \zeta\end{pmatrix}, \qquad \text{avec } T_2 = \left(\begin{array}{c|c}\tilde{T} & 0_{N,n-N} \\ \hline 0_{n-N,N} & I_{n-N}\end{array}\right) \tag{4.17}$$
où I_{n-N} représente la matrice identité de dimension $(n-N)\times(n-N)$.
5. En appliquant les deux transformations successives T_1, et T_2, c'est-à-dire, $z = T_2T_1x$, le système (4.1) s'écrit sous la forme
$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u, \tag{4.18}$$

avec $\hat{A} = T_2T_1AT_1^{-1}T_2^{-1}$, $\hat{B} = T_2T_1B$ et en vertu de la proposition sur le spectre, $\mathrm{Sp}(\hat{A})$ = $\mathrm{Sp}(A)$.

A partir de là, on traite le problème de la stabilisation de la partie commandable comme dans la section précédente.

■ ***Théorème***

> *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire invariant soit stabilisable par un bouclage régulier est que sa partie non-commandable soit stable.*

Exercice

Considérons les système suivant

–
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1\end{pmatrix} \tag{4.19}$$

–
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} \tag{4.20}$$

Sont-ils stabilisables ? Le cas échéant, proposer un bouclage permettant leur stabilisation.

4.2 Poursuite de trajectoires

Considérons la dynamique linéaire (4.1) où la paire (A, B) est commandable. On sait alors qu'il existe une transformation de coordonnées et un bouclage permettant de mettre cette dynamique sous la forme canonique de Brunovski

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n \\ \dot{z}_n & = & v \end{array}\right. \tag{4.21}$$

Posons maintenant $y = z_1$, on observe immédiatement que y satisfait l'équation différentielle

$$y^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n y(t)}{\mathrm{d}t^n} = v(t). \tag{4.22}$$

Supposons que nous souhaitions que $y(t)$ suive une trajectoire de référence $y_d(t)$, alors en posant

$$v = y_d^{(n)} + k_{n-1}\left(y_d^{(n-1)} - y^{(n-1)}\right) + \cdots + k_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + k_0(y_d - y), \tag{4.23}$$

et $\epsilon := y - y_d(t)$, on voit que (4.22) prend la forme d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants

$$\epsilon^{(n)} + k_{n-1}\epsilon^{(n-1)} + \cdots + k_0\epsilon = 0 \tag{4.24}$$

En choisissant les coefficients $k_0, \cdots, k_{n-1}$ de sorte que le polynôme

$$P(p) = p^n + k_{n-1}pn - 1 + \cdots + k_1 p + k_0 \tag{4.25}$$

soit un polynôme de **Hurwitz** (c'est-à-dire, polynôme ayant toutes ses racines à partie réelle négative), il vient que

$$\lim_{t \to +\infty} \epsilon(t) = 0 \tag{4.26}$$

autrement dit, la sortie $y(t)$ tend vers la trajectoire désirée $y_d(t)$ quand t tend vers l'infini.
Exercice
Considérons le modèle mathématique d'un moteur à courant continu

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -\dfrac{Rf + k_c k_e}{LJ}x_1 - \dfrac{RJ + Lf}{LJ}x_2 + \dfrac{k_c}{LJ}u \end{array}\right. \tag{4.27}$$

où x_1 représente la vitesse de rotation ω du moteur. Proposer un bouclage permettant de faire suivre à ω une trajectoire de référence arbitraire $\omega_d(t)$.

4.3 Placement de pôles

Dans cette partie, seuls les systèmes mono-entrée commandables sont considérés. Une commande par retour d'état de la forme :

$$u = -Kx + k_0 u_{\text{cons}}, \tag{4.28}$$

est utilisée afin de modifier le comportement du système dynamique (le rendre stable, plus rapide, plus précis, respecter un cahier des charges). Le vecteur ligne $K = [k_1, \cdots, k_n]$ va changer les valeurs propres de la matrice d'évolution. Le coefficient k_0 permettra une fois K déterminé, de régler le gain statique du système de consigne ou d'entrée u_{cons} et de sortie y, en utilisant le théorème de la valeur finale (ici pour un gain statique unitaire) :

$$k_0 = \left(C(-A + BK)^{-1}B + D\right)^{-1}. \tag{4.29}$$

Les valeurs propres du nouveau système sont alors les racines du polynôme caractéristique $P_{A-BK}(p) = \det(pI-(A-BK))$, qui est un polynôme de degré n. On dispose de n degrés de liberté (choix des coefficients k_1 à k_n pour modifier les racines du polynôme en boucle fermée. Si le système est commandable, alors on peut réaliser un placement de pôles arbitraire dans le plan complexe.
Le placement est simple en considérant la forme canonique de commandabilité : effectivement sur cette base, on obtient :

$$A_c - B_cK_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0-k_1^c & -a_1-k_2^c & \cdots & \cdots & -a_{n-1}-k_n^c \end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

Si le cahier des charges impose d'obtenir en boucle fermée les pôles p_i, le polynôme caractéristique en boucle fermée a alors les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} P_{A_c-B_cK_c}(p) &= p^n + (a_{n-1}+k_n^c)p^{n-1} + \cdots + (a_1+k_2^c)p + (a_0+k_1^c) && (4.31)\\ &= (p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n) && (4.32)\\ &= p^n + a_{n-1}^d p^{n-1} + \cdots + a_1^d p + a_0^d && (4.33) \end{aligned}$$

- ***Coefficients de*** K_c

> *Par identifi cation des coeffi cients des diverses expressions de ce même polynôme,*
>
> $$k_i^c = a_{i+1}^d - a_{i+1}, \qquad 1 \le i \le n. \tag{4.34}$$

Pour revenir dans la base de départ, il suffit de refaire le changement de base inverse :

- ***Coefficients de*** K

> *En utilisant le changement de base* $T = \mathcal{C}(A_c, B_c)\mathcal{C}(A,B)^{-1}$*, on obtient :*
>
> $$K = K_cT^{-1} \tag{4.35}$$

4.4 Formule d'Ackermann

La formule d'Ackermann offre une généralisation pour le placement des pôles sans calculer la matrice de passage T.
Les pôles doivent être placés aux racines du polynôme désiré $P^d(p) = p^n + a_{n-1}^d p^{n-1} + \cdots + a_1^d p + a_0^d$. Or d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_iA^i = 0$. Cela permet d'écrire :

$$P^d(A) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i^d - a_i)A^i. \tag{4.36}$$

Et

$$P^d(A_c) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_i^d - a_i)A_c^i = T^{-1}P^d(A)T. \tag{4.37}$$

Aussi pour tout $1 \le k \le n$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} A_c^k = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{k} \underbrace{1\, 0 \cdots 0}_{n-k} \end{bmatrix}, \tag{4.38}$$

soit

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} T^{-1} P^d(A) T = K_c \tag{4.39}$$

Donc

■ ***Formule d'Ackermann***

$$\begin{aligned} K &= K_c T^{-1} && (4.40) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} T^{-1} P^d(A) && (4.41) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} (\mathcal{C}(A,B))^{-1} P^d(A). && (4.42) \end{aligned}$$

L'avantage est de ne calculer que la dernière ligne de $(\mathcal{C}(A,B))^{-1}$.

Chapitre 5

Les observateurs

5.1 Introduction

Il arrive souvent que certaines variables de l'espace d'état ne soient pas mesurables pour différentes raisons (impossibilité pratique, coût des capteurs trop élevé, ...). Cependant, pour être en mesure d'appliquer un bouclage sur l'état (voir chapitre précédent), il est nécessaire de disposer de la mesure complète de l'état. Ainsi, lorsqu'une partie de l'état n'est pas disponible à la mesure, il devient primordial de pouvoir en donner une **estimation**. Ceci peut être réalisé par la construction d'un autre système dynamique appelé **observateur** dont le rôle est de produire une estimée satisfaisante des variables d'état du système original.

5.2 Synthèse d'un observateur

Considérons le système linéaire invariant

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^r$ et l'état initial $x(t_0) = x_0$ inconnu. On supposera que seule la sortie $y(t)$ est disponible pour la mesure.
Dans le cas où le système non-commande $\dot{x} = Ax$ est stable, c'est-à-dire, toute les valeurs propres de A sont à partie réelle négative, alors une façon relativement élémentaire pour construire un observateur consiste à recopier la dynamique (5.1) en remplaçant l'état x par son estimée $\hat{x}$, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t). \end{aligned} \qquad \text{avec } \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0. \tag{5.2}$$

Ainsi, $\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x})$. En introduisant la quantité $e(t) := x(t) - \hat{x}(t)$ que nous appelons **erreur d'observation** ou **erreur d'estimation**, la relation précédente prend la forme

$$\dot{e} = Ae. \tag{5.3}$$

Il suit de la stabilité de la matrice A que l'erreur tend exponentiellement vers 0 pour tout état initial $\hat{x}_0$. Autrement dit, l'estimée $\hat{x}$ tend asymptotiquement vers la vraie valeur de l'état x.
Dans le cas où la matrice A n'est pas stable, ou bien si ses valeurs propres ne permettent pas une décroissance suffisamment rapide de l'erreur vers 0, il est nécessaire de proposer un observateur dont la dynamique peut être fixée de façon arbitraire. Considérons l'observateur suivant

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y}) = A\hat{x} + Bu + KC(x - \hat{x}), \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t). \end{aligned} \qquad \text{avec } \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0. \tag{5.4}$$

Par rapport à l'observateur (5.2), un terme supplémentaire mesurable $K(y-\hat{y})$ vient modifier la dynamique de l'estimateur $\hat{x}$. Cette opération qui consiste à **injecter** le terme $K(y-\hat{y})$ (dépendant de la sortie mesurable du système (5.1)) dans la dynamique de l'estimateur est habituellement désignée dans la littérature sous le nom d'**injection de sortie**. De (5.1) et (5.4), il vient que

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - KC)e. \tag{5.5}$$

En supposant qu'il est possible de choisir le gain matriciel K de telle sorte que la matrice $A-KC$ soit stable, on voit immédiatement que l'erreur d'observateur décroit asymptotiquement vers 0 pour toute condition initiale $\hat{x}_0$. Il apparaît clairement d'après l'expression de la dynamique de l'erreur d'observation (5.5) que ceci peut être réalisé si la paire (C, A) est observable. Plus précisément, en prenant la transposée de la matrice $A-KC$, c'est-à-dire, $A^T - C^T K^T$, nous voyons que si la paire (A^T, C^T) est commandable, les valeurs propres de la matrice $A - KC$ peuvent être placées arbitrairement (voir le chapitre précédent et chapitre concernant la commandabilité et l'observabilité). Notons que la commandabilité de la paire (A^T, C^T) est équivalente à l'observabilité de la paire (A, C). En pratique les pôles de l'observateur sont choisis de la façon suivante :

$$|\mathrm{Re}\,(\lambda_{\mathrm{min}})|_{\mathrm{observateur}} > 10\,|\mathrm{Re}\,(\lambda_{\mathrm{max}})|_{\mathrm{système}}\,. \tag{5.6}$$

5.3 Principe de séparation

Il est important de mettre en évidence que la structure système-observateur préserve les pôles en boucle fermée que nous aurions obtenus si un bouclage sur l'état du système (5.1) avait été utilisé. En effet, considérons le bouclage sur l'état du système (5.1) de la forme

$$u = Fx. \tag{5.7}$$

Alors le système (5.1) en boucle fermée s'écrit

$$\dot{x} = (A + BF)x. \tag{5.8}$$

Les valeurs propres de la matrice $A + BF$ sont alors les pôles en boucle fermée du système bouclé par (5.7). Etant donné que l'état du système (5.1) n'est pas mesurable, on remplace dans l'expression du bouclage (5.7) l'état x par son estimée $\hat{x}$, c'est-à-dire,

$$u = F\hat{x} = Fx + Fe. \tag{5.9}$$

Il s'ensuit que le système (5.1) bouclé par (5.9) s'écrit

$$\dot{x} = (A + BF)x + BFe. \tag{5.10}$$

En réunissant les équations dynamiques (5.5) et (5.10), il vient que

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BF & BF \\ 0 & A - KC \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Puisque la matrice d'état de ce système est triangulaire supérieure par blocs, ses valeurs propres sont égales aux valeurs propres des matrice $A + BF$ et $A - KC$. Le fait fondamental que la dynamique du système (5.1) en boucle fermée et la dynamique de l'observateur en boucle fermée ne soient pas couplées est connu sous le nom de **principe de séparation**. Une conséquence de ce principe est qu'il est possible de synthétiser de façon "séparée" un bouclage et un observateur.

Annexe A

Linéarisation tangente

Tous les systèmes dynamiques rencontrés en automatique ne sont pas toujours représentés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Typiquement l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple entrainé par le couple d'un moteur font intervenir des termes non-linéaires :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\sin\theta + \frac{1}{mL}C, \tag{A.1}$$

où g est la pesanteur, m la masse du pendule, L la longueur du pendule, C le couple et θ l'angle du pendule avec la verticale. Le choix naturel de l'état du système est

$$x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Une représentation d'état de ce système non linéaire est alors :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{g}{L}\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL} \end{bmatrix} C. \tag{A.3}$$

■ ***Définition***

> *Un* **point d'équilibre** *est un couple composé d'un état et d'une entrée* (x_0, u_0) *impliquant une non évolution de cet état, c'est-à-dire :*
> $$\dot{x}_0 = f(x_0, u_0) = 0. \tag{A.4}$$

Dans l'exemple du pendule commandé par un moteur, l'ensemble des points d'équilibre vaut :

$$\left\{ \left(x_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_0 = mg\sin\theta_0 \right) \middle| \theta_0 \in [0, 2\pi[\right\}. \tag{A.5}$$

Autour d'un point d'équilibre (x_0, u_0), notons l'état et la commande : $x = x_0 + \delta x$ et $u = u_0 + \delta u$.
En utilisant l'approximation $\sin\theta = \sin(\theta_0 + \delta\theta) = \cos\theta_0 \sin\delta\theta + \sin\theta_0 \cos\delta\theta \approx \cos\theta_0\delta\theta + \sin\theta_0$, il est possible de linéariser l'équation différentielle (A.3) :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L}\cos\theta_0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{mL} \end{bmatrix} C. \tag{A.6}$$

La suite de cette annexe généralise cette notion de linéarisation pour les systèmes régis par des équations différentielles non linéaires stationnaires de la forme suivante autour d'un point d'équilibre :

$$\dot{x} = f(x, u). \tag{A.7}$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 1 en δx et δu :

$$\begin{aligned}\underbrace{\dot{x}_0}_{=0} + \dot{(\delta x)} &= f(x,u), \\ &= \underbrace{f(x_0,u_0)}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,u_0)\right)}_{A}\delta x + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,u_0)\right)}_{B}\delta u + o(\delta x, \delta u), \end{aligned} \tag{A.8}$$

où les termes $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ sont respectivement les jacobiens de f par rapport à x et à u :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{ij}, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_k}\right]_{ik}, \quad 1 \leq i,j \leq n, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{A.9}$$

Le modèle linéarisé tangent est donc donné par les matrices A et B :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,u_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{L}\cos\theta_0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.10}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,u_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{mL} \end{bmatrix}. \tag{A.11}$$

Annexe B

Représentation d’état discrétisée

Tout ce document n’a fait mention que de la modélisation en temps continu de la représentation d’état. Il est cependant possible d’appliquer les mêmes concepts pour des systèmes à temps discret. A partir d’un exemple (qu’il sera possible de généraliser simplement), certaines notions seront esquissées.

B.1 Passage équation aux différences vers représentation d’état

Prenons l’exemple d’un système régi par l’équation aux différences suivante :

$$\forall n, \qquad s_{n+1} + 2s_n + 3s_{n-1} = e_n. \tag{B.1}$$

Alors il est possible de poser comme état du système :

$$x_n = \begin{pmatrix} s_{n-1} \\ s_n \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

- ***Equation aux différences***

> *L’équation aux différences (B.1) se réécrit en :*
>
> $$x_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}}_{E} x_n + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{F} e_n. \tag{B.3}$$

- ***Equation d’observation***

> $$s_k = \underbrace{[0 \;\; 1]}_{G} x_k + \underbrace{0}_{H} e_k. \tag{B.4}$$

Il ressort une structure générale de la forme :

- ***Structure d’état discrétisée***

> $$x_{k+1} = Ex_k + Fe_k, \tag{B.5}$$
>
> $$s_k = Gx_k + He_k. \tag{B.6}$$

B.2 A partir du modèle à temps continu

Dans ce paragraphe, le modèle d'état discrétisé est recherché à partir du modèle d'état à temps continu. On considère que l'entrée $e(t)$ est constante (de valeur notée e_n sur la durée T entre deux échantillons. Alors :

$$x((k+1)T) = \exp(AT)x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp(A((k+1)T-\tau))Bu_k \mathrm{d}\tau, \tag{B.7}$$

$$= \exp(AT)x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \exp(A((k+1)T-\tau))\mathrm{d}\tau Bu_k, \tag{B.8}$$

$$= \exp(AT)x(kT) + \int_{0}^{T} \exp(A(T-\theta))\mathrm{d}\theta Bu_k. \tag{B.9}$$

En posant le changement de variable $\theta = \tau - kT$.
Aussi pour l'équation d'observation, il suffit de prendre la valeur en $t = kT$:

$$y_k = Cx_k + Du_k. \tag{B.10}$$

Par identification, il vient

■ ***Forme générale***

$$E = \exp(AT), \quad F = \int_0^T \exp(A(T-\theta))\mathrm{d}\theta B, \quad G = C, \quad H = D. \tag{B.11}$$

B.3 A propos de la réponse pile

Dans la partie commande numérique des systèmes, une commande particulière dite **réponse pile** a été étudiée. Cette commande permet d'annuler en un nombre fini d'échantillons l'erreur entre consigne et sortie. Ici cette commande est cherchée sous forme de retour d'état :

$$u_k = -Kx_k + v_k, \tag{B.12}$$

avec v_k la consigne. La matrice d'évolution va alors être de la forme $E - FK$. La réponse pile consiste à rendre nulle l'erreur pour toute condition initiale : en particulier pour une consigne nulle, on obtient :

$$x_k = (E - FK)^k x_0, \qquad \forall k > 0. \tag{B.13}$$

On souhaite qu'à partir du $n$ième échantillon, tous les échantillons soient nuls.

■ ***Réponse pile***

La réponse pile correspond donc à un retour d'état discrétisé qui rende la matrice d'évolution **nilpotente***, c'est-à-dire que* 0 *est la seule valeur propre de multiplicité* n*.*

$$K \textit{ tel que } \quad (E - FK)^n = 0. \tag{B.14}$$