Vincent Lescarret : physique mathématique

Equation des ondes (systèmes hyperboliques) à coefficients périodiques

1 Résonances et homogénéisation

Avec M. Vanninathan (TIFR CAM, Bangalore), H. Ammari (ENS) et G. Allaire (CMAP, Polytechnique).

Etude des résonances pour les cristaux photoniques. En particulier celles proches de l'axe réel permettent d'exprimer le facteur de qualité de la structure.

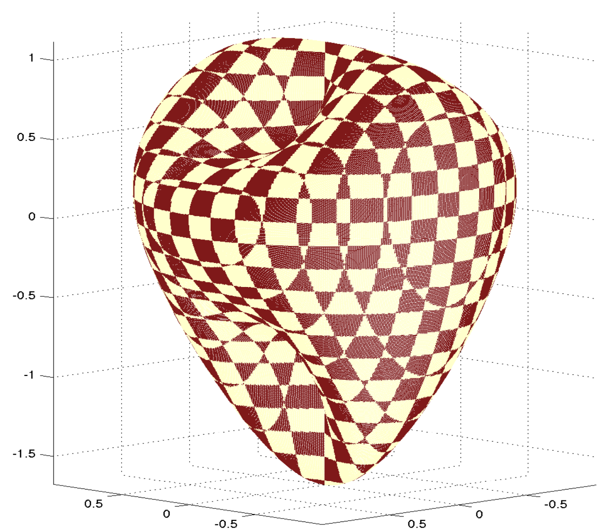

Figure 1 – Structure composée de cellules périodiques faites de matériaux différents.

Ondes dans un diélectrique de périodicité ε

$$\varepsilon^2\nabla\cdot(\sigma(x/\varepsilon)\nabla u(x)) + n(x/\varepsilon)^2\omega^2 u(x) = f, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Résonances = pôles de la résolvante sortante. La résolvante sortante est définie pour $\Im(\omega) > 0$ par l'application

$$\omega \to R(\omega) \quad \text{où} \quad R(\omega) : f \in L^2 \longrightarrow u \in L^2.$$

La résolvante se prolonge à $\mathbb{C}$ en une fonction méromorphe agissant de L^2_{comp} dans L^2_{loc}. En particulier, sur $\mathbb{R}$, la résolvante sortante est caractérisée par des conditions de radiation de Sommerfeld.

Résultats

- Convergence des résonances $\omega = O(\varepsilon)$ (liées à la structure globale) : les limites sont les résonances de la structure homogénéisée.
- Convergence des résonances $\omega = O(1)$ (liées à la structure périodique). Etude 1d : la limite réelle des résonances est égale au spectre de Bloch. Les résonances convergent vite vers le réel au bord des bandes : $\omega = O(\varepsilon^2)$ ($\omega = O(\varepsilon)$ à l'intérieur d'une bande). Les modes associés sont des ondes de Bloch modulées.

Projet en cours : extension du second point au cas multidimensionnel : nécessité de construire des quasi-modes.

2 Homogénéisation en imagerie de structures périodiques

Avec D. Lesselier et ses doctorants Li et Liu.

Cadre : problème de diffusion d'une onde plane (ou faisceau Gaussien) à travers une nappe plane formée de fibres disposées de manière périodique (réseau de diffraction).

Résultat : calcul des coefficients de diffusion en polarisation TE et TM dans la limite où la période tend vers zéro : en accord avec le calcul exact.

Projets :
- calculs des coefficients de diffusion en polarisation quelconque et dans le cas de deux couches superposées et croisées.
- Mêmes questions lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de la période (meilleure résolution près des défauts).
- Application à l'imagerie de défauts.

3 Dispersion des ondes dans une structure périodique discontinue

Projet en cours : le but du travail est la compréhension de propriétés « fines » de dispersion de l'équation des ondes

$$\partial_t^2 u - \operatorname{div}\Big(c^2(x)\nabla\Big)u = f \quad + \quad \text{conditions initiales}$$

où c est une fonction périodique <u>discontinue</u>. On cherche une estimation du type

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|u(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

qui, ajoutée à la conservation d'énergie, permet d'obtenir des estimations (Strichartz) de type $L_t^p L_x^q$ pour un ensemble ouvert d'exposants (p, q) ce qui permet ensuite d'aborder le problème d'existence du problème non linéaire

$$\partial_t^2 u - \operatorname{div}\Big(c^2(x)\nabla\Big)u = u^k.$$

Réponse négative en 1d (P. Gérard, N. Burq...) et problème encore ouvert pour une célérité si peu régulière.